

**International scientific journal
Spectral and Evolution Problems
Vol. 17**

**Міжнародний науковий журнал
Спектральні та еволюційні задачі
Том 17**

**Международный научный журнал
Спектральные и эволюционные задачи
Том 17**

Editorial Board:

N. D. Kopachevsky (editor-in-chief, Simferopol, Ukraine)
A. B. Antonevich (Minsk, Belarus)
T. Ya. Azizov (Voronezh, Russia)
Yu. V. Bogdansky (Kiyv, Ukraine)
M. L. Gorbachuk (Kiyv, Ukraine)
M. M. Malamud (Donetsk, Ukraine)
I. V. Orlov (associate editor, Simferopol, Ukraine)
B. I. Ptashnik (Lviv, Ukraine)
A. G. Rutkas (Kharkov, Ukraine)
Yu. S. Samoilenko (associate editor, Kiyv, Ukraine)
A. L. Skubachevskii (Moscow, Russia)

Advisory Editorial Board:

M. S. Agranovich (Moscow, Russia)
B. Boyarsky (Warsaw, Poland)
K. I. Chernyshov (Voronezh, Russia)
V. A. Derkach (Donetsk, Ukraine)
V. I. Ovchinnikov (Voronezh, Russia)
S. N. Samborsky (Caen, France)
V. I. Zhukovskiy (Moscow, Russia)

Editorial and Technical Support

P. A. Starkov (Simferopol, Ukraine)

Simferopol, Ukraine

International Scientific Journal

SPECTRAL AND EVOLUTION PROBLEMS

Volume 17

Simferopol, 2007

UDC 517+515

International Scientific Journal

**Spectral and Evolution problems: Proceedings of the Seventeenth Crimean
Autumn Mathematical School-Symposium. Vol. 17.** /Group of authors. —
Simferopol: Taurida National V. Vernadsky University

It is addressed to teachers, scientists, senior and post-graduated students of
mathematical and physical specialities.

© Taurida National V.Vernadsky University, 2007.

Please visit our site in the World Wide Web: www.kromsh.crimea.edu

СОДЕРЖАНИЕ

ОБ УСРЕДНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Антоневич А.Б. 5

КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ В L_p

Бер А.Ф. 11

ДИССИПАТИВНЫЕ И ОБРАТИМЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Брук В.М. 18

НОРМАЛЬНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ

Барфоломеев Е.М. 22

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ДЕЛЕЖА В КОНТРСТРАТЕГИЯХ

Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. 28

О КРАТНОСТИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФЛОКЕ

Журавлев Н.Б. 32

"НЕКОМПАКТНЫЕ" ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ. ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПО Э. ГИЛЬБЕРТУ

Гуров С.И., Долотова Н.С., Фатхутдинов И.Н. 37

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ, ОБСЛУЖИВАЕМОЙ ДВУМЯ НАЛАДЧИКАМИ

Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. 45

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Корнев В.В. 47

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лесных А.А. 50

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$

Мельникова И. В., Вдовин М. В. 56

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Орлов В.П. 65

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Попов В.А. 73

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАС- СА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПО- СТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ	
Рыхлов В.С.	78
ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕ- РАТОРА ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА	
Скороходов С. Л.	84
ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЯ	
Терновский В.В., Хапаев М.М.	93
СУЩЕСТВОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ДЕЛЕЖА В КОНТРСТРАТЕГИЯХ	
Хованский Д.С.	97
О ВЕЛИЧИНЕ СЕЧЕНИЯ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	
Шкаликова Н.А.	103
THE POINCARÉ-STOKES FORMULA IN AN INFINITE DIMENSIONAL SPACE	
BOGDANSKY YU. V., TSYTSURA P. V.	106
RELATIONS BETWEEN MODERN AND CLASSICAL SEMIGROUPS	
FREYBERG I.A., MELNIKOVA I.V.	117
ON NONLINEAR GINZBURG–LANDAU BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SUPERCONDUCTING PLATE IN A MAGNETIC FIELD	
KONYUKHOVA N.B., KUROCHKIN S.V.	125

ОБ УСРЕДНЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В работе на примере операторов взвешенного сдвига, порожденных иррациональным поворотом окружности, обсуждается, как может выглядеть аналог теории усреднения или теории приведения к каноническому виду для функциональных операторов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Функциональными операторами называют операторы, действующие в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X , и имеющие вид

$$Au(x) = \sum_{k=1}^m a_k(x) u(\alpha_k(x)), \quad u \in F(X), \quad (1.1)$$

где $\alpha_k : X \rightarrow X$ есть заданные отображения, а a_k есть заданные функции. Функциональные операторы, имеющие только одно слагаемое, т.е. операторы вида

$$Au(x) = a(x) u(\alpha(x)), \quad (1.2)$$

называются операторами взвешенного сдвига. Свойства функциональных операторов в связи с многочисленными приложениями исследовались с разных точек зрения многими авторами.

При исследовании конкретных уравнений коэффициенты могут оказаться функциями с весьма сложным поведением и расчеты, использующие такие операторы, затруднены. Поэтому естественно попытаться свести исследование к случаю уравнений с более простым поведением коэффициентов. Например, в теории дифференциальных уравнений имеется по крайней мере два варианта такого сведения — приведение уравнения к каноническому виду и теория усреднения. В работе обсуждается следующий вопрос, как может выглядеть аналог теории усреднения или теории приведения к каноническому виду для функциональных операторов?

В обоих случаях (при усреднении коэффициентов и при приведении к каноническому виду) задача заключается в том, чтобы заменить коэффициенты функционального оператора на коэффициенты с более простым поведением таким образом, чтобы сохранились (или мало изменились) основные свойства исходного оператора. В сформулированном виде задача не является точно поставленной: требует уточнения, что можно в конкретной ситуации считать коэффициентами с более простым поведением, и сохранения каких свойств исходного оператора можно потребовать. В работе рассмотрено несколько вариантов точной постановки задачи для модельного класса функциональных операторов — операторов взвешенного сдвига, порожденных, иррациональным поворотом окружности.

2. ОПЕРАТОРЫ ВЗВЕШЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫМ ПОВОРОТОМ

Пусть $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, и $\alpha(x) = x + h$, h — иррациональное число. В пространстве $L_2(S^1)$ рассмотрим оператор сдвига $T_h u(x) = u(x + h)$ и множество операторов взвешенного сдвига вида

$$Au(x) = a(x) u(x + h), \quad x \in S^1, \quad (2.1)$$

где коэффициент a является непрерывной комплекснозначной функцией, причем $a(x) \neq 0$ для всех x . Многие вопросы, возникающие в связи поставленными задачами, для операторов вида (2.1) рассматривались ранее в другом контексте. Поэтому

часть результатов является интерпретацией известных ранее фактов с точки зрения задачи усреднения или задачи приведения к каноническому виду. При иррациональном h для спектрального радиуса операторов вида (2.1) с непрерывными коэффициентами имеет место равенство [3, 2]

$$\ln r(A) = \exp \int_0^1 \ln |a(x)| dx, \quad (2.2)$$

которое означает, что спектральный радиус является средним геометрическим значением модуля коэффициента. Из формулы (2.2) следует, что для операторов вида (2.1) правило усреднения коэффициента, гарантирующее сохранение спектрального радиуса, может сводиться к замене коэффициента постоянной — средним геометрическим его модуля.

Наиболее существенным при этом является то, что в действительности имеет место *более сильный эффект усреднения*: связь исходного оператора и оператора с усредненным коэффициентом оказывается более существенной, а именно, у указанных операторов совпадают спектры и иногда такие операторы оказываются подобными.

Предложение 1. Для коэффициента a положим

$$\tilde{a} = \exp \int_0^1 \ln |a(x)| dx$$

и определим усредненный оператор, как оператор взвешенного сдвига с постоянным коэффициентом: $\tilde{A} = \tilde{a}T_h$. Тогда

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \tilde{a}\}.$$

Предложение следует из известного явного описания спектра оператора взвешенного сдвига вида (2.1) (см. [2, 3]).

3. Приводимость: случай положительных коэффициентов

Два оператора вида (2.1) будем называть *приводимыми*, если они подобны, причем подобие может быть задано с помощью (обратимого) оператора умножения на функцию.

Предложение 2. Если оператор взвешенного сдвига вида (2.1) подобен оператору взвешенного сдвига с постоянным коэффициентом, то эти операторы приводимы, т.е. существует такая измеримая функция $s(x)$, что оператор S умножения на функцию $s(x)$ является ограниченным и обратимым (эквивалентно тому, что $s(x)$ и $1/s(x)$ существенно ограничены) и

$$S^{-1}aT_hS = CT_h, \quad C = \text{const}. \quad (1)$$

Любой ограниченный обратимый оператор M , для которого выполнено равенство

$$M^{-1}aT_hM = CT_h, \quad (3.2)$$

т.е. задающий подобие, может быть представлен в виде $M = SW$, где W — произвольный обратимый оператор, перестановочный с T_h .

Доказательство. Прежде всего сделаем следующее замечание. Если у произвольного оператора вида (2.1) существует собственная функция s , то множество $\{x : s(x) = 0\}$ инвариантно относительно отображения $x \rightarrow x + h$; в силу эргодичности этого отображения получаем, что $\mu(\{x : s(x) = 0\}) = 0$. Это означает, что $s(x) \neq 0$ почти всюду. Из приведенных ниже рассуждений следует, что в случае подобия (3.2) выполнено более сильное условие: функции $s(x)$ и $1/s(x)$ существенно ограничены. Без ограничения общности достаточно рассмотреть случай $C = 1$.

Функции $e_k = \exp[i2\pi kx]$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(S^1)$ и являются собственными функциями оператора T_h , соответствующие собственные значения $\lambda_k = \exp[i2\pi kh]$ имеют кратность 1. В силу подобия (3.2) функция $s_k = Me_k$ является собственной функцией оператора aT_h , а система функций s_k является базисом Рисса. В частности, выполнено неравенство

$$0 < \frac{1}{\|M^{-1}\|} \leq \|s_k\| \leq \|M\|. \quad (3.3)$$

Пусть $u_k(x) = s_0(x) \exp[i2\pi kx]$. Для любого k функция u_k также является собственной функцией оператора aT_h с собственным значением λ_k . Следовательно $s_k = w_k u_k$, где w_k – постоянная. Так как $\|u_k\| = \|s_0\|$, из (3.3) следует, что

$$0 < \frac{1}{\|M^{-1}\|} \leq w_k \|s_0\| \leq \|M\|.$$

Полученное неравенство означает, что оператор W , действующий по формуле $We_k = w_k e_k$, ограничен и обратим; кроме того, он перестановочен с оператором T_h . Пусть S есть оператор умножения на собственную функцию s_0 . Тогда по построению $Me_k = SWe_k$ и равенство $Mu = SWu$ выполнено на всюду плотном множестве.

Значит $Su = MW^{-1}u$ на всюду плотном множестве, откуда следует, что оператор S ограничен на всюду плотном множестве. Аналогично, так как $S^{-1}u = WM^{-1}u$ на всюду плотном множестве, оператор S^{-1} ограничен на всюду плотном множестве. Осталось заметить, что оператор S умножения на функцию s ограничен на всюду плотном множестве в пространстве $L_2(S^1)$ тогда и только тогда, когда функция $s(x)$ существенно ограничена. Аналогично, оператор S^{-1} ограничен на всюду плотном множестве тогда и только тогда, когда функция $1/s(x)$ существенно ограничена. Что и требовалось доказать.

Таким образом, подобие оператора с переменным коэффициентом оператору с постоянным коэффициентом эквивалентно приводимости. Заметим, что в случае подобия двух операторов взвешенного сдвига с переменными коэффициентами рассуждения из доказательства предложения 1 не применимы и вопрос о приводимости остается открытым. Приводимость вида (3.1) эквивалентна существованию ограниченной собственной функции оператора aT_h , т.е. решения уравнения

$$a(x) s(x+h) = Cs(x).$$

Разрешимость этого уравнения можно записать как существование т.н. *факторизации со сдвигом* коэффициента a — представления коэффициента в виде

$$a(x) = C \frac{s(x)}{s(x+h)}, \quad (3.4)$$

где функции $s(x)$ и $1/s(x)$ существенно ограничены. Пусть $a \in C(S^1)$ и $a(x) > 0$. Введем новые функции $\varphi(x) = \ln a(x)$ и $d(x) = \ln s(x)$. Логарифмирование равенства (3.4) приводит к известному *гомологическому уравнению*

$$d(x) - d(x+h) = \varphi_1(x) - \ln C. \quad (3.5)$$

Это уравнение возникает в ряде других задач и хорошо исследовано [1, 4 - 6]. Подпространство в $C(S^1)$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 \varphi dx = 0,$$

обозначим через $C_0(S^1)$. Необходимым для разрешимости уравнения (3.5) является условие $\varphi - \ln C \in C_0(S^1)$, из которого постоянная C определяется однозначно:

$$C = \exp \int_0^1 \varphi dx.$$

Естественно, что эта постоянная совпадает со спектральным радиусом исходного оператора. Если искать решение гомологического уравнения в виде ряда Фурье, то получаем ряд:

$$d(x) = \sum_{k \neq 0} \frac{\varphi_k}{1 - \exp i2\pi kh} \exp i2\pi kx, \quad (3.6)$$

где φ_k есть коэффициенты Фурье функции φ . Этот ряд содержит малые знаменатели, в связи с чем возникают известные осложнения, в частности, ряд может оказаться расходящимся. Ограниченное решение уравнения (3.5) существуют только тогда, когда функция $\varphi - \ln C$ принадлежит некоторому незамкнутому, всюду плотному подпространству M_h в $C_0(S^1)$. Подпространство M_h не имеет простого явного описания, так как условия разрешимости гомологического уравнения (3.5) достаточно сложны и зависят от связи арифметической природы иррационального числа h (оценок малых знаменателей) и свойств функции φ . Известно, например, что, если функция φ достаточно гладкая, например, $\varphi \in C^4(S^1)$, то для почти всех h существует непрерывное решение гомологического уравнения, т.е. $C^4(S^1) \subset M_h$ для почти всех h . Условие, что две функции φ_1 и φ_2 попадают в один класс эквивалентности в фактор-пространстве $C(S^1)/M_h$, эквивалентно тому, что соответствующие операторы взвешенного $a_1 T_h$ и $a_2 T_h$ сдвига приводимы. Однако приходится отметить, что, если некоторый класс эквивалентности не содержит постоянной, то нет достаточно естественного способа выделить в классе простейший элемент, т.е. указать некоторый канонический вид операторов, принадлежащих данному классу приводимых между собой операторов. Как уже отмечалось, вопрос о том, следует ли в общем случае из подобия двух операторов взвешенного сдвига их приводимость, требует дополнительного исследования. Заметим, что условие $C = r(aT_h) = 1$ эквивалентно тому, что $\varphi = \ln a \in C_0(S^1)$. В случае $C = 1$ подобие (3.1) означает, в частности, что оператор aT_h подобен унитарному оператору T_h . Так как унитарные операторы и подобные к ним образуют класс операторов со сравнительно простой структурой, возникает вопрос: всегда ли из условия $C = 1$ следует, что оператор aT_h подобен некоторому унитарному оператору. Ответ отрицательный; из него следует, что среди операторов вида aT_h есть операторы с более сложной структурой.

Предложение 3. *Для любого иррационального h существует такая непрерывная функция $\varphi \in C_0(S^1)$, что оператор aT_h , где $a = \exp \varphi$, не подобен унитарному оператору.*

Доказательство. Предположим, что каждый оператор взвешенного сдвига с непрерывным положительным коэффициентом, удовлетворяющий условию $r(A) = 1$, подобен некоторому унитарному оператору.

Так как все степени унитарного оператора сдвига ограничены в совокупности, для каждого из рассматриваемых операторов A ограничены в совокупности по норме все степени A^n . Тогда из ограниченности положительных степеней вытекает, что для любой функции $\varphi \in C_0(S^1)$ последовательность

$$\sum_0^{n-1} \varphi(x + kh)$$

равномерно ограничена сверху. А из ограниченности отрицательных степеней вытекает, что для любой функции $\varphi \in C_0(S^1)$ последовательность

$$\sum_0^{n-1} \varphi(x + kh)$$

равномерно ограничена снизу. Так как

$$\sum_0^{n-1} \varphi(x + kh) = (S_n \varphi)(x),$$

где $S_n = \sum_0^{n-1} T_h^k$, из теоремы Банаха — Штейнгауза следует, что последовательность операторов S_n ограничена по норме в пространстве $C_0(S^1)$. Но легко проверить, что $\|S_n\| = n$, получаем противоречие, откуда и следует утверждение.

Таким образом, возникает иерархия сложности операторов aT_h . В случае, когда $r(aT_h) = 1$ и спектром оператора является единичная окружность, такая иерархия имеет следующий вид: операторы, подобные некоторому оператору с постоянным коэффициентом вида CT_h , где $|C| = 1$ (наиболее простые); операторы, подобные унитарному, но не подобные операторам вида T_h ; операторы, не подобные унитарному.

Отметим, что прием факторизации со сдвигом для исследования спектра операторов вида (2.1) был применен Н.К. Карапетянцем в [6].

4. Приводимость. СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Если коэффициент a является комплекснозначной функцией, то предыдущие рассуждения следует модифицировать. Может оказаться, что при гладком коэффициенте a непрерывная ветвь логарифма не существует, тогда функция $\varphi(x) = \ln a(x)$ имеет разрыв первого рода, а при гладкой функции a гомологическое уравнение с такой правой частью не имеет решений даже в пространстве $L_2(S^1)$ (коэффициенты ряда (3.6) не стремятся к нулю). Препятствием к существованию непрерывной ветви логарифма для функции a является ее индекс Коши $\chi(a)$ — непрерывная ветвь логарифма существует тогда и только тогда, когда $\chi(a) = 0$. Напомним, что *индексом Коши* функции на окружности называется приращение аргумента функции при обходе окружности, деленное на 2π . При $\chi(a) \neq 0$ можно рассмотреть другую факторизацию со сдвигом:

$$a(x) = Cz^m \frac{s(x)}{s(x+h)}, \quad (4.1)$$

где $m = \chi(a)$, $z = \exp[i2\pi x]$.

Действительно, у функции $a(x)z^{-m}$ существует непрерывная ветвь логарифма, причем эта ветвь имеет ту же гладкость, что и функция a . После замены $\varphi(x) = \ln[a(x)z^{-m}]$, $d(x) = \ln s(x)$ получаем гомологическое уравнение (3.5). Поэтому, если существует ограниченное решение гомологического уравнения, то имеет место приводимость:

$$SaT_hS^{-1} = Cz^mT_h. \quad (4.2)$$

Оператор Cz^mT_h в рассматриваемом случае можно считать *канонической формой* оператора aT_h с переменным коэффициентом. Заметим, что при $m \neq 0$ оператор z^mT_h является унитарным, но он не подобен оператору взвешенного сдвига с постоянным коэффициентом. Это следует, например, из того, что у такого оператора нет собственных значений.

5. Выводы

Из приведенных рассуждений и известных результатов о разрешимости гомологического уравнения получаем следующие выводы.

- 5.1. Если при замене коэффициента более простым требовать только сохранение спектрального радиуса оператора, то коэффициент можно заменить на положительную постоянную — среднее геометрическое модуля коэффициента и при этом у исходного и усредненного оператора спектры совпадают.
- 5.2. Процедура усреднения, в которой оператору $A = aT_h$ ставится в соответствие оператор $\tilde{A} = Cz^mT_h$, где $m = \chi(a)$ — индекс Коши коэффициента,

$$C = \exp \int \ln[z^{-m}a(x)] dx,$$

более естественна со следующей точки зрения — при таком усреднении не только сохраняется спектр оператора, но также для достаточно гладких

(класса C^4) коэффициентов при почти всех h оператор A приводится к оператору $\tilde{A}$.

5.3. Ограничения на гладкость коэффициента и на природу иррациональности числа h в 5.2 *существенны*:

5.3a. любой функции φ , не являющейся тригонометрическим многочленом (даже сколь угодно гладкой или аналитической) существует такое иррациональное h , что гомологическое уравнение не имеет ограниченных решений и соответствующий оператор A не приводится к оператору $\tilde{A}$.

5.3b. Для любого иррационального h существует такая непрерывная положительная функция a , что $r(aT_h) = 1$, но оператор aT_h не только не подобен оператору $\tilde{A} = T_h$, но он не подобен какому-либо унитарному оператору.

5.4. Множество всех операторов вида aT_h отношением приводимости разбиваются на обширное семейство классов эквивалентности, это семейство параметризуется элементами множества $\mathbb{Z} \times C(S^1)/M_h$. При этом нет достаточно естественного способа выделить в каждом классе простейший элемент, т.е. указать некоторый канонический вид операторов, принадлежащих данному классу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д.В. Аносов Об аддитивном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности. Изв. АН СССР, сер. мат. **37** (1973), 1259-1274.
- [2] А.Б.Антоневич Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Минск, Университетское, 1988.
- [3] А.Б.Антоневич и В.Б.Рывкин О нормальной разрешимости задачи о периодических решениях линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом., Дифференц. уравн. **10** (1974), 1347-1353.
- [4] В.И. Арнольд Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва, Наука, 1978.
- [5] А.Я. Гордон Достаточное условие неразрешимости аддитивного гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности. Функц. анализ и его прил. **9** (1975), по. 4, 71-72.
- [6] Н.К. Карапетянц Об одном классе дискретных операторов свертки с осциллирующими коэффициентами. ДАН СССР, **216** (1974), 28-31.

КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ В L_p

Пусть (X, Σ, μ) — измеримое пространство с конечной счетно-аддитивной полной мерой, $p \in [1, \infty]$, $L_p = L_p((X, \Sigma, \mu))$ — банахово пространство всех измеримых комплекснозначных функций f , заданных на (X, Σ, μ) , для которых $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ (функции, равные почти всюду, считаются равными).

В данной работе дается описание таких подмножеств из L_p , которые являются группами относительно поточечного умножения в L_p и которые компактны в $(L_p, \|\cdot\|_p)$ (единица группы — функция, тождественно равная 1). Кроме того дается критерий относительной компактности в топологии сходимости по мере подгруппы группы унитарных операторов в коммутативной алгебре фон Неймана с точным нормальным конечным следом.

Рассмотрим конечное или счетное дизъюнктное разбиение $\Lambda = \{X_i\}_{i \in I}$ пространства X на подмножества $X_i \in \Sigma$, $\mu(X_i) > 0$, $i \in I$ (в случае $p = \infty$ считаем, что I — конечно). Положим $G_\Lambda = \{f \in L_p : |f| = 1, f(x) = \alpha_i \text{ для всех } x \in X_i, \alpha_i \in \mathbb{C}, i \in I\}$.

Теорема 1. G_Λ — компактная группа в L_p .

Доказательство. Рассмотрим естественный алгебраический изоморфизм $\phi : \mathbb{T}^I \rightarrow G_\Lambda$, определяемый равенством $\phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) = \sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{X_i}$ (группу $\mathbb{T}$ мы ассоциируем с единичной окружностью в $\mathbb{C}$). На $\mathbb{T}^I$ рассмотрим метрику $\rho((\lambda_i^1), (\lambda_i^2)) = (\sum_{i \in I} \mu(X_i) |\lambda_i^1 - \lambda_i^2|^p)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\rho((\lambda_i^1), (\lambda_i^2)) = \max_{i \in I} |\lambda_i^1 - \lambda_i^2|$ при $p = \infty$. Тогда ϕ — изометрия.

Покажем, что метрика ρ согласована с топологией произведения в $\mathbb{T}^I$. Это очевидно при $p = \infty$, так как I — конечное множество в этом случае.

Пусть $p < \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу конечности меры μ найдется такое конечное подмножество I' в I , что $\sum_{i \notin I'} \mu(X_i) < \varepsilon^p / 2^{p+1}$. Тогда открытый шар с центром в единице и радиусом ε относительно метрики ρ содержит множество $\{(\lambda_i) : \sum_{i \in I'} |\lambda_i - 1|^p \mu(X_i) < \varepsilon^p / 2\}$, являющееся открытым относительно топологии произведения.

Обратно. Пусть I' — конечное подмножество в I и пусть $V = \prod_{i \in I} \{S_i : S_i = \mathbb{T} \text{ при } i \notin I' \text{ и } S_i \text{ — } \varepsilon\text{-окрестность единицы при } i \in I'\}$. Ясно, что подмножества такого вида образуют базу топологии произведения в $\mathbb{T}^I$. Кроме того, V содержит δ -окрестность единицы в метрике ρ , где $\delta = \varepsilon \min_{i \in I'} \mu(X_i)^{1/p}$. Из этого следует, что метрика ρ согласована с топологией произведения в $\mathbb{T}^I$. Поэтому G_Λ топологически изоморфна компактной группе $\mathbb{T}^I$.

Из теоремы 1, очевидно, следует, что любая замкнутая подгруппа любой группы вида G_Λ также будет компактной группой в L_p . Нашей основной целью является доказательство обратного утверждения: любая компактная группа в L_p является замкнутой подгруппой группы вида G_Λ .

Так как любая компактная группа G в L_p является компактной и в L_1 , то все наши дальнейшие рассуждения мы будем проводить для $p = 1$.

Для удобства дальнейших рассуждений введем следующие определения:

Группу G в L_1 будем называть *U-группой*, если $|f| = 1$ п.в. для всех $f \in G$.

Группу G в L_1 будем называть *D-группой*, если существует такое конечное или счетное дизъюнктное разбиение $\Lambda = \{X_i\}_{i \in I}$ пространства X на подмножества $X_i \in \Sigma$, $\mu(X_i) > 0$, $i \in I$, что $f(x) = \alpha_i$ для всех $x \in X_i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ для любых $f \in G$.

Группу G в L_1 будем называть *UD-группой*, если она одновременно является и U -группой, и D -группой. Ясно, что группа G есть UD -группа тогда и только тогда, когда она является подгруппой некоторой группы G_Λ .

Таким образом, нам нужно доказать, что любая компактная группа в L_1 является UD -группой.

Предложение 1. Пусть G — компактная группа в L_1 . Тогда G — U -группа.

Доказательство. Пусть $f \in G$. Положим $X_+ = \{x \in X : |f(x)| > 1\}$, $X_- = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$. Предположим, что $\mu(X_+) > 0$. Так как X_+ есть объединение множеств $X_m = \{x \in X : |f(x)| > 1 + 1/m\}$ по всем натуральным m , то найдется такое m , что $\mu(X_m) > 0$. Тогда $\|f^n\|_1 \geq (1 + 1/m)^n \mu(X_m)$, т.е. $\|f^n\|_1$ — неограниченная последовательность. А это противоречит компактности G . Поэтому $\mu(X_+) = 0$.

Доказательство $\mu(X_-) = 0$ сводится к предыдущему заменой функции f на f^{-1} .

Далее мы исследуем средние

$$s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m) = (n_1 \cdot \dots \cdot n_m)^{-1} \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} |\sin(\pi(k_1 x_1 + \dots + k_m x_m))|,$$

где $x_1, \dots, x_m \in [0, 1[$, $\sum_{i=1}^m x_i \neq 0$. Мы докажем существование предела $s(x_1, \dots, x_m) = \lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m)$ этих средних и покажем, что $s(x_1, \dots, x_m) \geq 1/2$.

Лемма 1. Если хотя бы одно из чисел $x_1, \dots, x_m$ иррационально, то предел $s(x_1, \dots, x_m)$ существует и равен $2/\pi$.

Доказательство. Мы докажем более общее утверждение: пусть f — непрерывная 1-периодическая функция. Тогда предел средних $s_{n_1 \dots n_m}(f; x_1, \dots, x_m) = (n_1 \cdot \dots \cdot n_m)^{-1} \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} f(k_1 x_1 + \dots + k_m x_m)$ существует и равен $\int_0^1 f(x) dx$.

Пусть $f(x) = \exp(2\pi i k x)$, где $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Тогда $s_{n_1 \dots n_m}(f; x_1, \dots, x_m) = \prod_{i=1}^m n_i^{-1} \sum_{k_i=1}^{n_i} \exp(2\pi i k_i k x_i)$. По условию одно из чисел $x_1, \dots, x_m$ иррационально, пусть это будет, например, x_1 . Тогда $|s_{n_1 \dots n_m}(f; x_1, \dots, x_m)| \leq n_1^{-1} |(\exp(2\pi i k(n_1 + 1)x_1) - 1)(\exp(2\pi i k x_1) - 1)^{-1}| \leq 2n_1^{-1} |\exp(2\pi i k x_1) - 1|^{-1} \rightarrow 0$ при $n_1 \rightarrow \infty$. Кроме того $\int_0^1 \exp(2\pi i k x) dx = 0$. Поэтому наше утверждение верно для $f(x) = \exp(2\pi i k x)$. Следовательно, оно верно и для всех тригонометрических полиномов вида $f(x) = \sum_{k=-s}^t c_k \exp(2\pi i k x)$.

Любую непрерывную 1-периодическую функцию можно рассматривать как непрерывную функцию на компакте $\mathbb{T}$. Поэтому из теоремы Стоуна-Вейерштрасса следует, что любая непрерывная 1-периодическая функция аппроксимируется тригонометрическими полиномами указанного выше вида.

Пусть f — произвольная непрерывная 1-периодическая функция. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический полином p , что $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in [0, 1[$. Существует такой номер N , что для всех $n_1, \dots, n_m > N$ будет $|s_{n_1 \dots n_m}(p; x_1, \dots, x_m) - \int_0^1 p(x) dx| < \varepsilon$. Тогда $|s_{n_1 \dots n_m}(f; x_1, \dots, x_m) - \int_0^1 f(x) dx| < 2\varepsilon + |s_{n_1 \dots n_m}(p; x_1, \dots, x_m) - \int_0^1 p(x) dx| < 3\varepsilon$, откуда следует, что утверждение верно и для f .

Применив это утверждение для $f(x) = |\sin(\pi x)|$, получим, что предел $s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m)$ существует и равен $\int_0^1 |\sin(\pi x)| dx = \int_0^1 \sin(\pi x) dx = 2/\pi$.

Лемма 2. Пусть все числа $x_1, \dots, x_m$ — ненулевые рациональные, т.е. $x_i = p_i/q_i$, $(p_i, q_i) = 1$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда предел $s(x_1, \dots, x_m)$ существует и равен $(q_1 \cdot \dots \cdot q_m)^{-1} \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{q_m-1} |\sin(\pi(k_1/q_1 + \dots + k_m/q_m))|$.

Доказательство. Обозначим $s_i = [n_i/q_i]$, $r_i = n_i - s_i q_i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Заметим, что множества $\{n(p_i/q_i)\}, \{(n+1)(p_i/q_i)\}, \dots, \{(n+q_1-1)(p_i/q_i)\}$ и $\{0, 1/q_i, \dots, (q_i-1)/q_i\}$ совпадают для любого целого n . Поэтому $(n_1 \cdot \dots \cdot n_m)^{-1} \sum_{k_1=1}^{s_1 q_1} \dots \sum_{k_m=1}^{s_m q_m} |\sin(\pi(k_1 p_1/q_1 + \dots + k_m p_1/q_1))| = (s_1/n_1) \cdot \dots \cdot (s_m/n_m) \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{q_m-1} |\sin(\pi(k_1/q_1 + \dots + k_m/p_m))| = (1/q_1 + \theta_1) \cdot \dots \cdot (1/q_m + \theta_m) \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{q_m-1} |\sin(\pi(k_1/q_1 + \dots + k_m/p_m))|$, где $|\theta_i| < n_i^{-1}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Следовательно, $(n_1 \cdot \dots \cdot n_m)^{-1} \sum_{k_1=1}^{s_1 q_1} \dots \sum_{k_m=1}^{s_m q_m} |\sin(\pi(k_1 p_1/q_1 + \dots + k_m p_1/q_1))| \rightarrow (q_1 \cdot \dots \cdot q_m)^{-1} \sum_{k_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{q_m-1} |\sin(\pi(k_1/q_1 + \dots + k_m/p_m))|$ при $\min(n_i) \rightarrow \infty$.

Оставшаяся часть суммы $s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m)$ не превосходит $S_1 + \dots + S_m$, где $S_i = (n_1 \cdot \dots \cdot n_m)^{-1} \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_i=s_i q_i+1}^{n_i} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} |\sin(\pi(k_1 x_1 + \dots + k_m x_m))| \leq q_i/n_i$ для всех $i = 1, \dots, m$. Следовательно, эта часть суммы стремится к нулю при $\min(n_i) \rightarrow \infty$.

Лемма 3. $\sum_{k=0}^{n-1} |\sin(\pi(k/n + a))| = \cos(\pi(n^{-1}\{a\}n - (2n)^{-1}))/\sin(\pi/(2n)) \geq \text{ctg}(\pi/(2n))$ для любого вещественного a при $n \geq 2$.

Доказательство. Пусть $r = [n\{a\}]$. Тогда $\sum_{k=0}^{n-1} |\sin(\pi(k/n + a))| = \sum_{k=-r}^{-r+n-1} |\sin(\pi(k/n + \{a\}))| = \sum_{k=-r}^{-r+n-1} \sin(\pi(k/n + \{a\}))$, так как $r/n \leq \{a\} < (r+1)/n$. Последняя сумма равна $\text{Im} \sum_{k=-r}^{-r+n-1} \exp(i\pi(k/n + \{a\})) = 2\text{Im} \exp(i\pi(\{a\} - r/n))(1 - \exp(i\pi/n))^{-1} = 2\text{Im} \exp(i\pi(\{a\} - r/n))(1 - \exp(-i\pi/n))(1 - \exp(i\pi/n))^{-1}(1 - \exp(-i\pi/n))^{-1} = (\sin(\pi(\{a\} - r/n)) - \sin(\pi(\{a\} - r/n - 1/n)))/(2\sin^2(\pi/(2n)))^{-1} = \cos(\pi(\{a\} - r/n - 1/(2n)))/\sin(\pi/(2n))$. Заметим, что $\{a\} - r/n = n^{-1}(n\{a\} - [n\{a\}]) = n^{-1}\{n\{a\}\}$. Так как $0 \leq n^{-1}\{n\{a\}\} < n^{-1}$, то $|n^{-1}\{n\{a\}\} - (2n)^{-1}| \leq (2n)^{-1}$. Поэтому $\cos(\pi(n^{-1}\{n\{a\}\} - (2n)^{-1})) \geq \cos(\pi/(2n))$.

Предложение 2. Последовательность $s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m) = (n_1 \cdot \dots \cdot n_m)^{-1} \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m} |\sin(\pi(k_1 x_1 + \dots + k_m x_m))|$ сходится при $\min(n_i) \rightarrow \infty$ для любых $x_1, \dots, x_m \in [0, 1[$, таких, что $\sum_{i=1}^m x_i \neq 0$. При этом предел $s(x_1, \dots, x_m) = \lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m) \geq 1/2$.

Доказательство. Если хотя бы одно из чисел $x_1, \dots, x_m$ иррационально, то утверждение следует из леммы 1. Осталось до конца разобрать случай, когда все числа $x_1, \dots, x_m$ рациональны. Пусть $i_1, \dots, i_l$ - все те индексы, для которых числа $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ - ненулевые. Легко видеть, что $s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m) = s_{n_{i_1} \dots n_{i_l}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_l})$. Пусть $x_{i_1} = p/q$, $(p, q) = 1$, $q \geq 2$. Тогда из лемм 2 и 3 следует, что предел $s(x_1, \dots, x_m) = \lim_{\min(n_i) \rightarrow \infty} s_{n_1 \dots n_m}(x_1, \dots, x_m)$ существует и $s(x_1, \dots, x_m) \geq q^{-1} \text{ctg}(\pi/(2q))$. Осталось показать, что $\inf\{n^{-1} \text{ctg}(\pi/(2n)) : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} = 1/2$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \text{ctg}(\pi/(2n)) = 2/\pi$. Кроме того функция $f(x) = x \cdot \text{ctg}(x)$ убывает на полуинтервале $]0, \pi/4]$, так как $f'(x) = (\sin(2x) - 2x)/(2\sin^2(x)) < 0$ на этом полуинтервале. Следовательно, $\inf\{n^{-1} \text{ctg}(\pi/(2n)) : n \in \mathbb{N}, n \geq 2\} = 2^{-1} \text{ctg}(\pi/4) = 1/2$.

Сформулируем основное техническое

Предложение 3. Пусть $g_1, \dots, g_n$ — измеримые функции, отображающие X в $[0, 1[$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, что $\|\exp(2\pi i n_1 g_1) \cdot \dots \cdot \exp(2\pi i n_m g_m) - 1\|_1 > \mu(\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(g_i)) - \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = s_{n \dots n}(g_1(x), \dots, g_m(x))$. Из предложения 2 следует, что эта последовательность сходится в каждой точке $x \in X$, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq 1/2$ для всех $x \in \bigcup_{i=1}^m \text{supp}(g_i)$. Тогда по теореме Лебега функция $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ измерима и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x) \geq \mu(\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(g_i))/2$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\int f_N(x) d\mu(x) > \mu(\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(g_i))/2 - \varepsilon/2$. Но левый интеграл есть среднее арифметическое интегралов $\int |\sin(\pi(k_1 g_1(x) + \dots + k_m g_m(x)))| d\mu(x)$, поэтому найдутся такие числа $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}$, что $\int |\sin(\pi(n_1 g_1(x) + \dots + n_m g_m(x)))| d\mu(x) > \mu(\bigcup_{i=1}^m \text{supp}(g_i))/2 - \varepsilon/2$. Осталось заметить, что $\|\exp(2\pi i n_1 g_1) \cdot \dots \cdot \exp(2\pi i n_m g_m) - 1\|_1 = 2 \int |\sin(\pi(n_1 g_1(x) + \dots + n_m g_m(x)))| d\mu(x)$.

У предложения 3 есть два важных следствия. Первое из них это

Предложение 4. Пусть G — сепарабельная U -группа. Тогда найдется такое множество $X_G \in \Sigma$, что (i). $\mu(X_G) \leq \sup\{\|f - 1\|_1 : f \in G\}$; (ii). $f(x) = 1$ для почти всех $x \in X \setminus X_G$ и любых $f \in G$.

Доказательство. Пусть $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ — плотное подмножество в G ; g_n — такая измеримая функция, отображающая X в $[0, 1[$, что $f_n(x) = \exp(2\pi i g_n(x))$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Положим $X_G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{supp}(g_n)$. Покажем, что X_G удовлетворяет условиям (i) и (ii).

(i). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $\mu(\bigcup_{n=1}^N \text{supp}(g_n)) > \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{supp}(g_n)) - \varepsilon$. Тогда из предложения 3 следует, что для некоторых чисел $n_1, \dots, n_N$ выполняется неравенство $\|f_1^{n_1} \cdot \dots \cdot f_N^{n_N} - 1\|_1 = \|\exp(2\pi i n_1 g_1) \cdot \dots \cdot \exp(2\pi i n_N g_N) - 1\|_1 > \mu(\bigcup_{i=1}^N \text{supp}(g_i)) - \varepsilon > \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{supp}(g_n)) - 2\varepsilon$. Поэтому $\mu(X_G) - 2\varepsilon < \sup\{\|f - 1\|_1 : f \in G\}$. В силу произвольности ε мы получаем $\mu(X_G) \leq \sup\{\|f - 1\|_1 : f \in G\}$.

(ii). Пусть $f \in G$. Предположим, что $\mu(\{x \in X \setminus X_G : f(x) \neq 1\}) > 0$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\mu(\{x \in X \setminus X_G : |f(x) - 1| > \varepsilon\}) = \lambda > 0$. Но в этом случае $\|f - f_n\|_1 \geq \varepsilon \lambda > 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, что противоречит плотности $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Поэтому $\mu(\{x \in X \setminus X_G : f(x) \neq 1\}) = 0$.

Вторым следствием предложения 3 является

Предложение 5. Пусть $g : [a, b] \rightarrow [0, 1[$ — строго возрастающее отображение. Тогда подмножество $\{\exp(2\pi i n g) : n \in \mathbb{Z}\}$ в $L_1[a, b]$ не является относительно компактным.

Доказательство. Из предложения 3 следует, что для любого $t \in]0, (b-a)/4[$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\int_a^{b-(b-a)/4} |\exp(2\pi i n g(x+t)) - \exp(2\pi i n g(x))| dx = \int_a^{b-(b-a)/4} |\exp(2\pi i n (g(x+t) - g(x))) - 1| dx > (b-a - (b-a)/4) - t > (b-a)/2$.

Предположим, что подмножество $\{\exp(2\pi i n g) : n \in \mathbb{Z}\}$ относительно компактно в $L_1[a, b]$. Тогда по критерию М.Рисса относительной компактности в $L_1[a, b]$ [2]

интегралы $\int_a^{b-(b-a)/4} |\exp(2\pi i n g(x+t)) - \exp(2\pi i n g(x))| dx$ должны сходиться к нулю при $t \rightarrow 0$ равномерно по n . А это противоречит предыдущему неравенству. Поэтому подмножество $\{\exp(2\pi i n g) : n \in \mathbb{Z}\}$ в $L_1[a, b]$ не является относительно компактным.

Лемма 4. Пусть g — измеримая вещественная функция на X , $g^*(t) = \inf\{c : \mu\{x : g(x) \leq c\} \leq t\}$ — неубывающая перестановка функции $g(x)$ [3]. Тогда для любой измеримой ограниченной функции f на $\mathbb{R}$ выполняется равенство $\int f(g(x)) d\mu(x) = \int_0^{\mu(X)} f(g^*(t)) dt$.

Доказательство. Пусть A — измеримое подмножество в $\mathbb{R}$, $f = \chi_A$. Тогда в силу равноизмеримости g и g^* [3] левый и правый интегралы в утверждении леммы равны $\mu(g^{-1}(A))$. Следовательно, утверждение верно и для любых простых функций f . Тогда в общем случае доказываемое равенство следует из равномерной аппроксимируемости любой ограниченной измеримой функции простыми функциями.

Пусть $X_0 \in \Sigma$ и $\mu(X_0) > 0$. Обозначим $\Sigma_{X_0} = \{A \in \Sigma : A \subset X_0\}$, $L_1^{X_0} = L_1(X_0, \Sigma_{X_0}, \mu)$, $G_{X_0} = \{f_1 \in L_1^{X_0} : f_1 = f|_{X_0} \text{ для некоторой функции } f \in G\}$. Ясно, что естественное отображение сужения из L_1 в $L_1^{X_0}$ является непрерывным.

Предложение 6. Пусть g — такая измеримая функция, отображающая X в $[0, 1]$, что подмножество $\{\exp(2\pi i n g) : n \in \mathbb{Z}\}$ относительно компактно в L_1 . Тогда на некотором подмножестве полной меры в X функция g является простой.

Доказательство. Множество $S = \{\lambda \in [0, 1] : \mu(g^{-1}(\{\lambda\})) > 0\}$ не более, чем счетно, так как является счетным объединением конечных множеств $\{\lambda \in [0, 1] : \mu(g^{-1}(\{\lambda\})) > 1/n\}$ по всем $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\{X_\lambda = g^{-1}(\{\lambda\}) : \lambda \in S\}$ — не более, чем счетное дизъюнктивное семейство измеримых подмножеств в X . Нам нужно показать, что $\mu(X^0) = 0$, где $X^0 = X \setminus \bigcup_{\lambda \in S} X_\lambda$.

Предположим, что $\mu(X^0) > 0$. Так как множество сужений на X^0 функций $\{\exp(2\pi i n g) : n \in \mathbb{Z}\}$ также является относительно компактным в $L_1^{X^0}$, то для удобства, не ограничивая общности, будем считать, что $X^0 = X$ и все множества $g^{-1}(\{\lambda\})$ имеют нулевую меру. Пусть g^* — неубывающая перестановка функции $g(x)$. Рассмотрим отображение $F : \{\exp(2\pi i n g) : n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow L_1[0, \mu(X)]$, положив $F(\exp(2\pi i n g)) = \exp(2\pi i n g^*)$. Из леммы 4 следует, что F — изометрия. Поэтому множество $\{\exp(2\pi i n g^*) : n \in \mathbb{Z}\}$ относительно компактно в $L_1[0, \mu(X)]$. Кроме того g^* — строго возрастающая функция, иначе, если $a < b$ и $g^*(a) = g^*(b) = \lambda_0$, то в силу равноизмеримости g и g^* [3] было бы $0 = \mu(g^{-1}(\{\lambda_0\})) \geq b - a$. Но эта ситуация противоречит утверждению предложения 5. Поэтому $\mu(X^0) = 0$.

Предложение 7. Пусть G — компактная группа в L_1 , содержащая плотную конечнопорожденную подгруппу. Тогда G есть UD -группа.

Доказательство. Из предложения 1 следует, что каждая функция $f \in G$ имеет вид $f(x) = \exp(2\pi i g(x))$ для некоторой измеримой функции g со значениями в $[0, 1]$.

Пусть функции $f_1, \dots, f_n$ порождают плотную подгруппу в G . Из предложения 6 следует, что все эти функции — простые на некотором подмножестве $X' \subset X$, $\mu(X') = \mu(X)$. Так как этих функций — конечное число, то существует такое не более, чем счетное дизъюнктивное разбиение $\Lambda = \{X_i \in \Sigma : i \in I, \mu(X_i) > 0\}$ множества X' , что любая функция f_k , $k = 1, \dots, n$ постоянна на каждом X_i , $i \in I$. Но тогда и любая функция f из подгруппы, порожденной $f_1, \dots, f_n$, также будет постоянной на каждом X_i , $i \in I$. Легко видеть, что в силу плотности этой подгруппы в G любая функция $f \in G$ будет постоянной на каждом X_i , $i \in I$.

Теперь все готово, чтобы доказать наше основное утверждение:

Теорема 2. Любая компактная группа G в L_1 есть UD -группа.

Доказательство. Пусть G — компактная группа в L_1 . Из [1, Теорема 24.7] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ в ε -окрестности единицы группы G существует такая замкнутая подгруппа G_1 группы G , что $G/G_1 \cong \mathbb{T}^n \times F$, где n — неотрицательное целое число, а F — конечная группа. Так как группа G_1 , естественно, является сепарабельной, то из предложения 4 следует, что существует такое множество $X_\varepsilon \in \Sigma$, что $\mu(X_\varepsilon) \leq \varepsilon$ и $f|_{X \setminus X_\varepsilon} = 1$ п.в. для любой функции $f \in G_1$. Следовательно, G_1 лежит в ядре гомоморфизма сужения из G в $G_{X \setminus X_\varepsilon}$. Следовательно, группа $G_{X \setminus X_\varepsilon}$ есть непрерывный гомоморфный образ группы $\mathbb{T}^n \times F$ (см. [1, Теорема 5.35]). Но группа $\mathbb{T}^n \times F$ содержит плотную конечнопорожденную подгруппу, так как $\mathbb{T}$ содержит плотную циклическую подгруппу. Поэтому и группа $G_{X \setminus X_\varepsilon}$ содержит плотную конечнопорожденную подгруппу. Тогда из предложения 7 следует, что $G_{X \setminus X_\varepsilon}$ есть UD -группа. Таким образом, мы доказали, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $X_\varepsilon \in \Sigma$, $\mu(X_\varepsilon) \leq \varepsilon$, что для его дополнения $X \setminus X_\varepsilon$ существует не более, чем счетное дизъюнктное разбиение Λ_ε , на каждом элементе которого все функции $f \in G$ постоянны п.в..

Существует такая последовательность подмножеств $X_{1/n}$ с указанным выше свойством, что $X_{1/n} \subseteq X_{1/(n-1)}$ при $n \geq 2$. Тогда пересечение этих множеств имеет нулевую меру, а дополнение этого пересечения есть дизъюнктное объединение множеств $X \setminus X_1$, $X_1 \setminus X_{1/2}$, ..., $X_{1/n} \setminus X_{1/(n+1)}$, Каждый элемент этого разбиения, в свою очередь разбивается на не более, чем счетное число подмножеств, на которых все функции $f \in G$ постоянны п.в..

Приведем основной результат в общей формулировке:

Теорема 3. *Любая компактная группа G в L_p является замкнутой подгруппой некоторой группы G_Λ .*

Доказательство. В работе [4] показано, что любая компактная подгруппа в коммутативной C^* алгебре порождает конечномерную подалгебру. Отсюда следует утверждение для $p = \infty$.

Выше уже было замечено, что компактная группа в L_p будет компактной группой и в L_1 . Поэтому утверждение теоремы для $p < \infty$ вытекает из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть G — компактная группа в L_p , действующая на пространстве $L_2 = L_2(X, \Sigma, \mu)$ поточечным умножением. Тогда бикоммутант G'' в алгебре $B(L_2)$ всех ограниченных линейных операторов в L_2 есть атомическая алгебра фон Неймана (в случае $p = \infty$ эта алгебра конечномерна).*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что в $B(L_2)$ найдется такая не более, чем счетная (в случае $p = \infty$ — конечная) система попарно ортогональных проекторов $\{P_i : i \in J\}$, $\sum_{i \in J} P_i = I$, что любой элемент $A \in G$ имеет вид $A = \sum_{i \in J} \lambda_i P_i$, $|\lambda_i| = 1$ для всех $i \in J$. Поэтому G входит в атомическую алгебру фон Неймана, порожденную проекторами P_i , $i \in J$. Следовательно, G'' есть подалгебра фон Неймана в атомической алгебре фон Неймана. Поэтому G'' сама есть атомическая алгебра фон Неймана.

Следствие 2. *Пусть A — коммутативная алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ , t_τ — топология сходимости по мере в A , порожденная следом τ [6]; $U(A)$ — группа унитарных операторов в A . Тогда топология t_τ на $U(A)$ совпадает с топологией, индуцированной на $U(A)$ нормированной топологией, порожденной нормой $\|a\|_p = (\tau(|a|^p))^{1/p}$, $a \in A$, для любого $p \in [1, \infty[$, и для подгруппы $G \in U(A)$ следующие условия эквивалентны:*

(i) G относительно компактна в топологии t_τ (соответственно, G — относительно компактна в равномерной топологии A).

(ii) Бикоммутант G'' есть атомическая алгебра фон Неймана (соответственно, конечномерная).

Доказательство. Хорошо известно [5], что коммутативная алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом изоморфна алгебре $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, действующей на гильбертовом пространстве $L_2(X, \Sigma, \mu)$ поточечным умножением, где (X, Σ, μ) - измеримое пространство с конечной счетно-аддитивной полной мерой, а следу соответствует интеграл по мере μ . При этом топология сходимости по мере относительно следа (интеграла) совпадает с обычной топологией сходимости по мере в алгебре измеримых функций. На любом ограниченном множестве функций эта топология совпадает с топологией L_p -нормы для любого $p \in [1, \infty[$. Поэтому мы можем использовать L_1 -норму — более удобную для нас.

Пусть G — некоторая группа таких измеримых функций f на X , что $|f| = 1$ п.в..

(i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть множество G относительно компактно в L_1 . Тогда его замыкание $\overline{G}$ есть компактная группа в L_1 . Действительно, если $f = \lim f_n$, $g = \lim g_m$, то $\|fg - f_n g_m\|_1 = \|fg - fg_m + fg_m - f_n g_m\|_1 \leq \|fg - fg_m\|_1 + \|fg_m - f_n g_m\|_1 = \|g - g_m\|_1 + \|f - f_n\|_1$, так как $|f(x)| = |g_m(x)| = 1$ п.в.. Поэтому утверждение следует из следствия 1.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Это следует из теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Хьюитт, К. Росс Абстрактный гармонический анализ. Т.1, М., "Наука", 1975, 656с.
- [2] Л.А. Люстерник, В.И. Соболев Краткий курс функционального анализа. М., "Высшая школа", 1982, 272с.
- [3] С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов Интерполяция линейных операторов. М., "Наука", 1978, 400с.
- [4] А.Ф. Бер Компактные абелевы группы в C^* и в W^* алгебрах. Современные проблемы и актуальные вопросы функционального анализа, Материалы Республ. научной конференции, Ташкент 2006, сс.8-11.
- [5] J. Dixmier Von Neumann Algebras. North-Holland Mathematical Library, 27. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981.
- [6] F.J. Yeadon Non-commutative L_p -spaces. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.- 1975.- № 77.- P. 91, §102.

ДИССИПАТИВНЫЕ И ОБРАТИМЫЕ ОТНОШЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ ФУНКЦИЕЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В терминах граничных значений описываются диссипативные, аккумулятивные и обратимые расширения минимального отношения, порожденного неотрицательной операторной функцией и дифференциально-операторным выражением эллиптического типа.

Linear relations generated by a nonnegative operator function and an elliptic operator differential expression are studied. A description of dissipative, accumulative and invertible extensions of a minimal relation in the terms of boundary values is given.

В данной работе с помощью граничных значений описываются диссипативные, аккумулятивные и обратимые расширения минимального отношения, указанного в заголовке. Наличие неограниченного операторного коэффициента в дифференциальном выражении и наличие весовой операторной функции требуют при построении граничных значений выхода за рамки исходного пространства.

Пусть H - сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. На конечном отрезке $[0, b]$ рассмотрим дифференциальное выражение $l[y] = -y'' + \mathcal{A}_1(t)y$, где операторная функция $\mathcal{A}_1(t)$ удовлетворяет условиям: при любом $t \in [0, b]$ оператор $\mathcal{A}_1(t)$ положительно определен и самосопряжен в H ; операторы $\mathcal{A}_1(t)$ имеют постоянную область определения $D(\mathcal{A}_1(t)) = D(\mathcal{A}_1)$; для любого $x \in D(\mathcal{A}_1)$ функция $\mathcal{A}_1(t)x$ сильно непрерывно дифференцируема.

Зафиксируем точку $t_0 \in [0, b]$. Пусть $\{\hat{H}_\tau\}$ ($-1 \leq \tau \leq 1$) - гильбертова шкала пространств, порожденная оператором $\mathcal{A}_1(t_0)$. Шкала $\{\hat{H}_\tau\}$ не зависит от выбора точки t_0 в следующем смысле. Если $\{\hat{H}'_\tau\}$ - шкала, порожденная оператором $\mathcal{A}_1(t'_0)$ ($t'_0 \in [0, b]$), то множества $\hat{H}_\tau$ и $\hat{H}'_\tau$ совпадают, а нормы в них эквивалентны. При каждом t оператор $\mathcal{A}_1(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно $\hat{H}_{+1}$ на H . Сопряженный к $\mathcal{A}_1(t)$ оператор $\mathcal{A}_1^+(t)$ отображает непрерывно и взаимно однозначно H на $\hat{H}_{-1}$ и является расширением $\mathcal{A}_1(t)$. Обозначим $l^+[y] = -y'' + \mathcal{A}_1^+(t)y$.

Пусть $A(t)$ - сильно измеримая на $[0, b]$ операторная функция, значениями которой являются ограниченные неотрицательные операторы в H . Предполагается, что норма $\|A(t)\|$ суммируема на $[0, b]$. На множестве непрерывных на $[0, b]$ функций со значениями в H введем скалярное произведение: $(y, z)_B = \int_0^b (A(t)y(t), z(t))dt$. Отождествляя с нулем функции y со свойством $(y, y)_B = 0$ и производя пополнение, получим гильбертово пространство, обозначаемое $B = L_2(H, A(t); 0, b)$. Элементами B являются классы функций, отождествленных по норме $\|\cdot\|_B$. Далее $\tilde{y}$ обозначает класс функций с представителем y . Про функцию y будем также говорить, что y принадлежит B .

Пусть $G_0(t)$ - множество таких элементов $x \in H$, что $A(t)x = 0$, $H(t)$ - ортогональное дополнение в H к $G_0(t)$, $A_0(t)$ - сужение $A(t)$ на $H(t)$, $\{H_\xi(t)\}$ - гильбертова шкала пространств, порожденная оператором $A_0^{-1}(t)$. Оператор $A_0(t)$ расширяется по непрерывности до оператора $\tilde{A}_0(t)$, отображающего непрерывно и взаимно однозначно $H_{-\alpha}(t)$ на $H_{1-\alpha}(t)$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). Через $\tilde{A}(t)$ обозначим оператор, определенный на $H_{-\alpha}(t) \oplus G_0(t)$, равный $\tilde{A}_0(t)$ на $H_{-\alpha}(t)$ и нулю на $G_0(t)$. Оператор $\tilde{A}(t)$ является расширением $A(t)$. В [1] доказано, что B состоит из классов функций с представителями вида $\tilde{A}_0^{-1}(t)A^{1/2}(t)h(t)$, где $h(t) \in L_2(H; 0, b)$.

Обозначим через D' множество функций $y(t) \in V$ со свойствами: i) $y(t)$ сильно непрерывно дифференцируема на $[0, b]$ в H и $y'(t)$ абсолютно непрерывна в $\dot{H}_{-1}$; ii) $l^+[y](t) \in H_{1/2}(t)$ при почти всех t и $\tilde{A}_0^{-1}(t)l^+[y] \in V$. Поставим в соответствие каждому классу функций, отождествленных в V с $y \in D'$, класс функций, отождествленных в V с $\tilde{A}_0^{-1}(t)l^+[y]$. Таким образом, получим линейное отношение $L' \subset V \oplus V$, замыкание которого обозначим через L и назовем максимальным отношением. Минимальное отношение L_0 определим как сужение L на множество элементов $\tilde{y} \in V$, обладающих представителями $y \in D'$ со свойством $y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$. Далее обозначаем: $\{\cdot, \cdot\}$ - упорядоченная пара, $\text{Ker } L$ - множество пар вида $\{z, 0\} \in L$, $\ker L$ - множество элементов z таких, что $\{z, 0\} \in L$.

Пусть $G(t, s)$ - функция Грина [2] задачи $l[y] = g(t)$, $y'(0) = y'(b) = 0$. Обозначим через $U(t)$ операторную однострочную матрицу $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$, где $U_1(t) = G(t, 0)$, $U_2(t) = G(t, b)$. Пусть Q_0 - множество таких элементов $c \in H \oplus H$, что $A(t)U(t)c = 0$ при почти всех t ; Q - ортогональное дополнение в $H \oplus H$ к Q_0 . Введем на Q скалярное произведение

$$(c_1, c_2)_- = \int_0^b (A(s)U(s)c_1, U(s)c_2)ds \quad (c_1, c_2 \in Q).$$

Пусть Q_- - пополнение Q по норме, порожденной этим скалярным произведением, Q_+ - позитивное пространство по отношению по отношению к Q , Q_- . Символ $\tilde{U}(t)c$ ($c \in Q_-$) обозначает класс функций, к которому сходится в V последовательность $\{\tilde{U}(t)c_n\}$ ($c_n \in Q$), когда $\{c_n\}$ сходится в Q_- к c . Пусть $V: Q_- \rightarrow V$ - оператор, определенный равенством $Vc = \tilde{U}(t)c$. Так как $\ker V = \{0\}$ и область значений V замкнута, то сопряженный оператор $V^*\tilde{f} = \int_0^b U^*(s)\tilde{A}(s)f(s)ds$ непрерывно отображает V на Q_+ .

Лемма 1. *Отношение L состоит из множества таких пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in V \oplus V$, что*

$$\tilde{y} = \tilde{U}(t)c + \tilde{F}, \quad (1)$$

где $c \in Q_-$, $\tilde{F}$ - класс функций, отождествленных в пространстве V с функцией $F(t) = \int_0^b G^*(s, t)\tilde{A}(s)f(s)ds$.

Замечание 1. *Элемент $c \in Q_-$ и функция F определяются по паре $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L$ единственным образом. Пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L'$ тогда и только тогда, когда $c \in Q$. В этом случае $c = \{-y'(0), y'(b)\}$.*

Замечание 2. $V^*\tilde{f} = \{F(0), F(b)\}$.

Замечание 3. *При отсутствии операторного веса (т.е. при $A(t) = E$, где E - тождественный оператор) справедливо равенство $Q_- = \dot{H}_{-3/4} \oplus \dot{H}_{-3/4}$ [3, с. 256].*

Лемма 2. L_0 - замкнутое симметрическое отношение и $L_0^* = L$.

Сопоставим каждой паре $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L$ пару граничных значений по формуле $\Gamma\{\tilde{y}, \tilde{f}\} = \{c, V^*\tilde{f}\} \in Q_- \oplus Q_+$ (c такое же, как в лемме 1). Обозначим $\Gamma_i = P_i\Gamma$ ($i = 1, 2$), где P_1, P_2 - проекторы $Q_- \oplus Q_+$ на Q_- , Q_+ соответственно.

Теорема 1. *Для любых пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}, \{\tilde{z}, \tilde{g}\} \in L$ справедлива "формула Грина":*

$$(\tilde{f}, \tilde{z})_V - (\tilde{y}, \tilde{g})_V = (Y_2, Z_1) - (Y_1, Z_2),$$

где $\{Y_1, Y_2\} = \Gamma\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, $\{Z_1, Z_2\} = \Gamma\{\tilde{z}, \tilde{g}\}$.

Теорема 1 влечет, что четверка $(Q_-, Q_+, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений (ПГЗ) в смысле работ [4, 5] (результаты [4, 5] изложены в [3]). Между отношениями $\theta \subset Q_- \oplus Q_+$ и отношениями L_θ со свойством $L_0 \subset L_\theta \subset L$ существует взаимно однозначное соответствие, задаваемое равенством $\Gamma L_\theta = \theta$. Отношения θ и L_θ одновременно являются или нет замкнутыми, максимальными диссипативными (аккумулятивными, симметрическими), самосопряженными. Изометрический оператор I_b , отображающий Q_- на Q_+ , определим равенством $I_b = \int_0^b U^*(s)\tilde{A}(s)\tilde{U}(s)ds$. Обозначим $I_b^{1/2} = (I_b|_Q)^{1/2}: Q \rightarrow Q_+$, $\hat{I}_b^{1/2}: Q_- \rightarrow Q$ - расширение $I_b^{1/2}$ на Q_- . Тогда

$I_b = I_b^{1/2} \hat{I}_b^{1/2}$. Положим $\hat{Y}_1 = \hat{I}_b^{1/2} \Gamma_1\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, $\hat{Y}_2 = I_b^{-1/2} \Gamma_2\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$. Из [4, 5] и теоремы 1 следует

Теорема 2. Для любого сжатия K в пространстве $Q \oplus Q$ граничные условия

$$(K - E)\hat{Y}_2 + i(K + E)\hat{Y}_1 = 0, \quad (K - E)\hat{Y}_2 - i(K + E)\hat{Y}_1 = 0 \quad (2)$$

определяют в $B \oplus B$ соответственно максимальное диссипативное и максимальное аккумулятивное расширение отношения L_0 . Обратно, всякое максимальное диссипативное (максимальное аккумулятивное) расширение отношения L_0 определяется условием (2), где K - сжатие (предполагается, что $D(K) = Q \oplus Q$). Максимальные симметрические (самосопряженные) расширения L_0 описываются условиями (2), в которых K изометрический (унитарный) оператор.

Отметим, что линейные отношения впервые были применены к описанию самосопряженных расширений дифференциальных операторов Ф.С. Рофе-Бекетовым. При отсутствии операторного веса отношение L является оператором и описание перечисленных в теореме 2 расширений дано в работах Ф.С.Рофе-Бекетова, М.Л. Горбачука, В.М.Брука, Л.И. Вайнермана (Эти результаты изложены в [3]). Граничные значения в этих работах строились иначе, чем здесь.

Пусть пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L$. Тогда $\{\tilde{y}, \tilde{f} - \lambda\tilde{y}\} \in L - \lambda E$. Положим $\Gamma(\lambda)\{\tilde{y}, \tilde{f} - \lambda\tilde{y}\} = \Gamma\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$, $\Gamma_i(\lambda)\{\tilde{y}, \tilde{f} - \lambda\tilde{y}\} = \Gamma_i\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$ ($i = 1, 2$). Обозначим через ρ_0 множество чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\lambda G_A - E$ имеет ограниченный обратный в $L_2(H; 0, b)$ (здесь G_A - интегральный оператор с ядром $A^{1/2}(t)G(t, s)A^{1/2}(s)$). Множество ρ_0 содержит все действительные, отрицательные числа и нуль. Далее всегда считаем, что $\lambda \in \rho_0$. При таких λ оператор $\Gamma(\lambda)$ непрерывно отображает пространство $L - \lambda E$ на $Q_- \oplus Q_+$ и сужение $\Gamma_1(\lambda)$ на $\text{Ker}(L - \lambda E)$ является взаимно однозначным отображением на Q_- . Следовательно, четверка $(Q_-, Q_+, \Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda))$ является ПГЗ для отношения $L - \lambda E$ в смысле работ [6, 7]. Оператор $\Phi(\lambda): Q_- \rightarrow Q_+$ определим равенством $\Phi(\lambda) = \Gamma_2(\lambda)(\Gamma_1(\lambda)|_{\text{Ker}(L - \lambda E)})^{-1}$ (отметим, что можно выписать явный вид $\Phi(\lambda)$ с использованием функции Грина задачи Неймана для выражения $l^+[y] - \lambda y$). Из [7] следует

Теорема 3. Для принадлежности точки λ точечному спектру $\sigma_p(L_\theta)$ отношения L_θ необходимо и достаточно, чтобы $\text{ker}(\theta - \Phi(\lambda)) \neq \{0\}$. Пусть отношение θ замкнуто. Точка λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(L_\theta)$ (непрерывному спектру $\sigma_c(L_\theta)$) тогда и только тогда, когда отношение $(\theta - \Phi(\lambda))^{-1}$ является неплотным определенным (плотным определенным и неограниченным) оператором. Точка λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(L_\theta)$ отношения L_θ в том и только том случае, когда $(\theta - \Phi(\lambda))^{-1}$ является ограниченным всюду определенным оператором.

Пусть отношение θ имеет вид $\theta = S_2^{-1} \circ S_1$, где $S_2: Q_+ \rightarrow B_0$ - ограниченный оператор, $S_1 \subset Q_- \oplus B_0$ - линейное отношение, B_0 - какое-либо банахово пространство. Если S_1 является оператором, то отношение θ состоит из всех пар $\{g_1, g_2\}$, удовлетворяющих условию $S_1 g_1 = S_2 g_2$. Отношения θ и S_1 одновременно замкнуты или нет. Отношение $C(\lambda)$ определим равенством $C(\lambda) = S_1 - S_2 \Phi(\lambda)$.

Теорема 4. Для принадлежности точки λ точечному спектру $\sigma_p(L_\theta)$ необходимо и достаточно, чтобы $\text{ker} C(\lambda) \neq \{0\}$. Пусть отношение S_1 замкнуто. Точка λ принадлежит остаточному спектру $\sigma_r(L_\theta)$ (непрерывному спектру $\sigma_c(L_\theta)$) тогда и только тогда, когда $C^{-1}(\lambda)$ является оператором и оператор $C^{-1}(\lambda)S_2$ неплотным определенным (плотным определенным и неограниченным). Точка λ принадлежит $\rho(L_\theta)$ в том и только том случае, когда $C^{-1}(\lambda)$ является оператором с областью определения, содержащей область значений S_2 .

Пусть $\tilde{y}$ имеет вид (1), где $s \in Q$. Тогда, согласно замечаниям 1, 2, пара $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L'$ и значения $y(0), y'(0), y(b), y'(b)$ определяются по паре $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$ единственным образом. Для каждой такой пары $\{\tilde{y}, \tilde{f}\}$ положим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(y) &= \alpha_{11}y(0) + \alpha_{12}y'(0) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b), \\ \mathcal{L}_1(y) &= \alpha_{21}y(0) + \alpha_{22}y'(0) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b), \end{aligned}$$

где α_{ij}, β_{ij} ($i, j = 1, 2$) - ограниченные линейные операторы в пространстве H .

Обозначим через L_{θ_0} отношение, состоящее из упорядоченных пар $\{\tilde{y}, \tilde{f}\} \in L'$, удовлетворяющих равенству $\mathcal{L}_1(y) = \mathcal{L}_2(y) = 0$. Это условие с учетом (1) может быть записано в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} U_1(0) & U_2(0) \\ U_1(b) & U_2(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y'(0) \\ y'(b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(0) \\ F(b) \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\alpha_{12} & \beta_{12} \\ -\alpha_{22} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y'(0) \\ y'(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, из определения граничных операторов Γ_1, Γ_2 и из равенств $U'_1(0) = -E$, $U'_1(b) = U'_2(0) = 0$, $U'_2(b) = E$ имеем

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(U_1) & \mathcal{L}_1(U_2) \\ \mathcal{L}_2(U_1) & \mathcal{L}_2(U_2) \end{pmatrix} \Gamma_1\{\tilde{y}, \tilde{f}\} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{pmatrix} \Gamma_2\{\tilde{y}, \tilde{f}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, отношение $\theta_0 = \Gamma(L_{\theta_0})$ состоит из упорядоченных пар $\{g_1, g_2\}$, удовлетворяющих условию $S_1 g_1 = S_2 g_2$, где S_1, S_2 - операторы, порождаемые в пространстве $B_0 = H \oplus H$ соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_1(U_1) & \mathcal{L}_1(U_2) \\ \mathcal{L}_2(U_1) & \mathcal{L}_2(U_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & -\beta_{11} \\ -\alpha_{21} & -\beta_{21} \end{pmatrix}.$$

Выясним, когда $0 \in \sigma_p(L_{\theta_0})$ (случай $\lambda \in \sigma_p(L_{\theta_0})$ может быть рассмотрен аналогично с использованием функции Грина задачи Неймана для выражения $l^+[y] - \lambda y$). Из определения операторов Γ_1, Γ_2 и из леммы 1 следует, что $\Phi(0) = 0$. Поэтому оператор $C(0) = S_1$. Из теоремы 4 вытекает, что отношение L_{θ_0} обратимо (т.е. $L_{\theta_0}^{-1}$ - оператор), тогда и только тогда, когда отношение S_1^{-1} является оператором. Отметим, что в случае отсутствия операторного веса последнее утверждение доказано в [2].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Брук В.М., О линейных отношениях в пространстве вектор-функций. - Матем. заметки, т. 24, № 4 (1978), с. 499 - 511.
- [2] Лаптев Г.И., Сильно эллиптические уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. - Литовский матем. сб., т. 8, № 1 (1968), с. 87 - 99.
- [3] Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений, Киев, Наукова Думка, 1984.
- [4] Кочубей А.Н., О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений. - Матем. заметки, т. 17, № 1 (1975), с. 41 - 48.
- [5] Брук В.М. Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии. - Матем. сб., т. 100, № 2 (1976), с. 210 - 216.
- [6] Брук В.М. Об обратимых сужениях замкнутых операторов в банаховых пространствах. - Функциональный анализ, № 28, Ульяновск, 1988, с. 17 - 22.
- [7] Брук В.М. О спектре линейных отношений, связанных с равномерно корректными задачами. - Дифференциальные уравнения, т. 43, № 1 (2007).

БРУК В.М., САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, САРАТОВ, 410054, РОССИЯ;

E-mail: bruk@san.ru или *E-mail:* vladislavbruk@mail.ru

НОРМАЛЬНОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ¹

1. ВВЕДЕНИЕ

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают вращающиеся волновые структуры, используемые для кодирования и передачи информации [13, 14]. Этот эффект описывается бифуркацией Андронова—Хопфа периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения, содержащего преобразование пространственных переменных. В работах [2, 6, 10] такая задача рассматривалась в простых пространственных областях с одним преобразованием переменных, наиболее часто используемым на практике: поворотом на постоянный угол и радиальным сжатием. Случай произвольных области $Q \subset \mathbb{R}^2$ и преобразования переменных изучался в работах [7, 11] при условии нормальности линеаризованного эллиптического функционально-дифференциального оператора задачи. Общий случай без предположения нормальности рассматривался в работах [1, 9].

В работе [8] были получены необходимые и достаточные условия нормальности такого оператора, содержащего одно преобразование переменных. При некоторых условиях было доказано, что оператор нормален тогда и только тогда, когда преобразование переменных принадлежит классу аффинных преобразований с ортогональными матрицами.

Нормальность такого оператора в случае двух преобразований переменных изучалась в работах [3, 4, 12]. Рассматривались различные варианты взаимодействия двух преобразований. В частности, важную роль играет их коммутативность. Результаты работы [8] о классе преобразований, допускающих нормальность, были обобщены при некоторых дополнительных ограничениях на коэффициенты задачи.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного функционально-дифференциального оператора задачи с любым конечным числом преобразований переменных.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial Q \subset C^\infty$, $n \geq 2$. Обозначим g_i , $i = 1, \dots, N$, $N \geq 2$, взаимно-однозначные преобразования класса C^3 , такие что

$$g_i : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow g_i(V) \subset \mathbb{R}^n, \quad |J_{g_i}(x)| \neq 0, \quad x \in V,$$

где V — ограниченная область, $\overline{Q} \subset V$, $J_{g_i}(x) = [\partial g_{ip} / \partial x_q]_{p,q=1}^n$ — матрица Якоби преобразования g_i , $|J_{g_i}(x)| = |\det J_{g_i}(x)|$, $i = 1, \dots, N$. Будем предполагать, что выполнено следующее условие:

$$g_i(Q) \subset Q, \quad i = 1, \dots, N.$$

Введем неограниченный оператор

$$A_0 : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad A_0 v = \Delta v,$$

с областью определения $D(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\}$. Здесь $W_2^k(Q)$ обозначает пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00256.

вместе со всеми обобщенными производными вплоть до порядка k включительно, оператор $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v / \partial \nu)|_{\partial Q}$ задает краевые условия, а ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$.

Как известно, оператор A_0 — самосопряженный. Рассмотрим оператор

$$A : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad A = A_0 + \sum_{i=1}^N A_i,$$

где $A_i, i = 1, \dots, N$, — ограниченные линейные операторы преобразования переменных, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ по формуле

$$A_i : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad A_i v(x) = a_i v(g_i(x)),$$

где $a_i \neq 0$ — вещественные числа, $i = 1, \dots, N$.

Оператор A называется *нормальным*, если $D(AA^*) = D(A^*A)$ и выполнено

$$AA^*v = A^*Av, \quad v \in D(AA^*).$$

Положим $D(A) = D(A_0)$.

Введем множества $G_{g_i}^m = \{x \in Q : g_i^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \dots, i = 1, \dots, N$. Здесь $g_i^m(x)$ обозначает преобразование g_i , примененное m раз. Будем записывать суперпозицию преобразований в виде $g_i g_j(x)$, $g_i^{-1} g_j(x)$ и т. д.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала введем несколько условий, которые будут использоваться при формулировке теорем.

Условие 1. $\sum_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ для любого подмножества $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, N\}$, такого что $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Условие 2. $g_i(x) \neq g_j^{-1}(x)$ для почти всех $x \in Q$ и всех $i, j = 1, \dots, N, i \neq j$.

Условие 3. $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \alpha_{ij} a_i a_j \neq 0$ для любого множества $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^N$, такого что $\alpha_{ij} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\alpha \neq \{0\}_{i,j=1}^N$.

Следующие два условия являются более слабыми версиями условий 1 и 3. Положим $1 \leq M \leq N$.

Условие 1^M. $\sum_{i \in \mathcal{K}} a_i \neq 0$ для любого подмножества $\mathcal{K} \subset \{1, \dots, M\}$, такого что $\mathcal{K} \neq \emptyset$.

Условие 3^M. $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{M,N} \alpha_{ij} a_i a_j \neq 0$ для любого множества $\alpha = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{M,N}$, такого что $\alpha_{ij} \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\alpha \neq \{0\}_{i,j=1}^{M,N}$.

Основными результатами этой работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $G_{g_i}^2 \neq \emptyset$ и $g_i(Q) = Q, i = 1, \dots, N$.

(а) Если оператор A — нормальный и выполнены условия 1 и 2, то

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E, b_i \in \mathbb{R}^n$.

(б) Если выполнено свойство (1) и

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

то оператор A — нормальный.

- (в) Если выполнены условия 1, 2 и 3, то оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства (1) и (2).

Теорема 2. Пусть $G_{g_i}^2 = \emptyset$, $i = 1, \dots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, N$, и справедливы следующие утверждения:

- (а) Если оператор A — нормальный и выполнено условие 1, то

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3)$$

а оператор A является самосопряженным.

- (б) Если выполнено свойство (3), то оператор A — самосопряженный.

Теорема 3. Пусть $G_{g_i}^2 \neq \emptyset$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, а также $G_{g_i}^2 = \emptyset$, $i = M + 1, \dots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M + 1, \dots, N$, и справедливы следующие утверждения:

- (а) Если оператор A — нормальный и выполнены условия 1^M и 2, то

$$g_i(x) = K_i x + b_i, \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad (4)$$

$$|J_{g_i}(x)| = 1, \quad x \in Q, \quad i = M + 1, \dots, N, \quad (5)$$

где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$.

- (б) Если выполнены свойства (4) и (5), а также

$$g_i g_j(x) = g_j g_i(x), \quad x \in Q, \quad i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6)$$

то оператор A — нормальный.

- (в) Если выполнены условия 1^M , 2 и 3^M , то оператор A является нормальным тогда и только тогда, когда выполнены свойства (4)–(6).

4. КОММЕНТАРИИ

Существование условий, входящих в состав полученных результатов, для случая двух преобразований пространственных переменных была показана на нескольких контрпримерах в предшествующих работах [3, 12]. В случае произвольного числа преобразований соответствующие контрпримеры строятся аналогично.

В случае более двух преобразований переменных появляется новое условие 3. Оно достаточно громоздко, однако оно выполняется для почти всех векторов $(a_1, \dots, a_N)$, исключая только множество меры нуль в $\mathbb{R}^N$ (конечное число гиперповерхностей). С другой стороны, многие простые наборы коэффициентов $a_1, \dots, a_N$ не удовлетворяют условию 3 (например, коэффициенты $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$). Трудность заключается в том, что условие 3 при больших N практически невозможно проверить: требуется проверить $5^{N(N-1)/2} - 3^{N(N-1)/2}$ неравенств. Условие 3 требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (2) в теореме 1 следует из нормальности оператора A . Условие 3^M при $M < N$ является более слабым, чем условие 3, и требуется только для того, чтобы доказать, что свойство (6) в теореме 3 следует из нормальности оператора A .

Рассмотрим пример чисел $a_1, \dots, a_N$, удовлетворяющих условию 3. Фактически, сформулируем некоторые достаточные условия, при которых выполняется условие 3. Используем обозначение $\mathbb{Q}$ для множества рациональных чисел.

Лемма 1. Пусть числа

$$n_i = b_0 q^{k_i}, \quad i = 1, \dots, N,$$

таковы, что $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_N$, $b_0, q \in \mathbb{N}$ и $q \geq 3$. Тогда числа

$$a_i = \cos n_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

удовлетворяют условию 3.

Лемма 2. Пусть $a_1, \dots, a_N$ — числа, заданные в лемме 1. Тогда для любых $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N \in \mathbb{Q}$, $\delta \in \mathbb{Q}$ ($\delta \neq 0$) числа

$$\tilde{a}_i + \delta a_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

удовлетворяют условию 3.

Таким образом, можно взять любой набор рациональных чисел $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_N$, удовлетворяющий или не удовлетворяющий условию 3, и модифицировать его согласно лемме 2 (при этом $\delta \neq 0$ можно выбирать сколь угодно малым). Тогда в силу леммы 2 модифицированный набор чисел $\tilde{a}_1 + \delta a_1, \dots, \tilde{a}_N + \delta a_N$ будет удовлетворять условию 3.

Следующая лемма показывает, каким образом условие 3^M включено в теорему 3.

Лемма 3. Пусть $G_{g_i}^2 \neq \emptyset$ и $g_i(Q) = Q$, $i = 1, \dots, M$, а также $G_{g_i}^2 = \emptyset$, $i = M+1, \dots, N$. Тогда $g_i(Q) = Q$, $i = M+1, \dots, N$, и если оператор A нормальный и выполнены условия 1^M и 2, то

- (1) $g_i(x) = K_i x + b_i$, $x \in Q$, где K_i — ортогональные матрицы размера $n \times n$, $K_i^2 \neq E$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, M$;
- (2) $|J_{g_i}(x)| = 1$, $x \in Q$, $i = M+1, \dots, N$.

Если, кроме того, выполнено условие 3^M , то

- (3) $g_i g_j(x) = g_j g_i(x)$, $x \in Q$, $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Рассмотрим пример, показывающий, что условие 3^M существенно в лемме 3.

Пример 1. При $N = 3$, $n = 3$ рассмотрим оператор $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$. Положим $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, тогда условие 3^M не выполняется. Возьмем следующие аффинные преобразования с ортогональными матрицами:

$$g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad g_3(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Пусть $x \in Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. Тогда $g_1(Q) = g_2(Q) = g_3(Q) = Q$ и легко проверить, что

$$\begin{aligned} g_2^2(x) &= x, \quad g_3^2(x) = x, \quad g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x), & x \in Q; \\ g_1^2(x) &\neq x, \quad g_1 g_2(x) \neq g_2 g_1(x), \quad g_1 g_3(x) \neq g_3 g_1(x), & x \in Q \setminus \{x : x_1 = 0, x_3 = 0\}. \end{aligned}$$

В терминах леммы 3 получим, что $G_{g_1}^2 = Q \setminus \{x : x_1 = 0, x_3 = 0\} \neq \emptyset$ и $G_{g_2}^2 = G_{g_3}^2 = \emptyset$. Коэффициенты $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ удовлетворяют условию 1^M. Также легко убедиться в том, что выполнено условие 2 (поскольку матрицы ортогональны, обратные преобразования получаются переходом к транспонированным матрицам).

Докажем, что оператор A нормальный. Очевидно, что для любого $x \in Q$

$$g_1 g_2^{-1}(x) = g_1^{-1} g_3(x), \quad g_2 g_1^{-1}(x) = g_3^{-1} g_1(x), \quad (7)$$

$$g_1 g_3^{-1}(x) = g_2^{-1} g_1(x), \quad g_3 g_1^{-1}(x) = g_1^{-1} g_2(x). \quad (8)$$

Поскольку g_1, g_2, g_3 — аффинные преобразования с ортогональными матрицами, легко показать, что $A_0 A_i u = A_i A_0 u$ и $A_0 A_i^* u = A_i^* A_0 u$, $i = 1, 2, 3$, $u \in D(AA^*)$. Следовательно, нормальность оператора A эквивалентна нормальности оператора $A_1 + A_2 + A_3$ при $u \in D(AA^*)$. Легко проверить, что оператор $A_1 + A_2 + A_3$ является нормальным в силу равенств $g_2 g_3(x) = g_3 g_2(x)$ ($x \in Q$), (7) и (8).

Таким образом, выполнены все условия леммы 3, кроме условия 3^M . Оператор A является нормальным, однако преобразование g_1 не коммутирует с g_2 и g_3 . Следовательно, условие 3^M существенно в лемме 3.

Рассмотрим классы преобразований (1) и (3), заданные теоремами 1–3. Очевидно, что преобразования класса (1) являются также преобразованиями класса (3). Рассмотрим пример, показывающий, что существуют преобразования класса (3), не принадлежащие классу (1).

Пример 2. В соответствии с условиями теоремы 2 построим взаимно-однозначное преобразование g , такое что $g \in C^3$, $g(Q) = Q$, $g^2(x) = x$ и $|J_g(x)| = 1$ для всех

$x \in Q$. Положим $Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ и рассмотрим преобразование *квазиповорота*

$$\omega : (r, \varphi) \mapsto (r, \hat{\omega}(r, \varphi)),$$

где r и φ — полярные координаты, соответствующие координатам (x_1, x_2) . Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

легко показать, что $|J_\omega(r, \varphi)| = \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\omega}(r, \varphi) \right|$. Положим

$$\hat{\omega}(r, \varphi) = \varphi + r^2.$$

Тогда $|J_\omega(r, \varphi)| \equiv 1$. Очевидно, что преобразование ω взаимно-однозначно, $\omega(Q) = Q$, а обратное преобразование $\omega^{-1}(x)$ определяется функцией $\hat{\omega}(r, \varphi) = \varphi - r^2$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\omega \in C^3$. Преобразование ω не принадлежит классу (1).

Обозначим через h взаимно-однозначное преобразование отражения относительно диаметра круга Q . Очевидно, что $h \in C^\infty$, $h(Q) = Q$, а также $h^2(x) = x$ и $|J_h(x)| = 1$ для всех $x \in Q$. Преобразование h принадлежит классу (1).

Тогда преобразование $g = \omega^{-1}h\omega$ обладает всеми требуемыми свойствами, однако не принадлежит классу (1).

В работе [11] построен следующий пример преобразования класса (3), не принадлежащего классу (1). Отметим, что здесь область Q не является кругом.

Пример 3. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, такая что:

- (1) если $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_1$, то $(x_1, -x_2) \in \Gamma_1$, где $\Gamma_1 = \{x \in \partial Q : |x_2| \geq 7/4\}$;
- (2) множество $\Gamma_2 = \{x \in \partial Q : 0 \leq x_2 \leq 7/4\}$ состоит из двух отрезков $\{x : x_1 = \pm 2, 0 \leq x_2 \leq 7/4\}$;
- (3) множество $\Gamma_3 = \{x \in \partial Q : -7/4 \leq x_2 \leq 0\}$ состоит из двух кривых $\{x : x_1 = \pm 2 + \xi(x_2), -7/4 \leq x_2 \leq 0\}$, где $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ — нечетная функция, такая что $0 \leq \xi(t) \leq 1/2$, $\xi(t) = 1/2$ при $3/4 \leq t \leq 5/4$, $\xi(t) = 0$ при $t \in [0, 1/2] \cup [3/2, \infty)$.

Рассмотрим отображение $g(x) = (x_1 - \xi(x_2), -x_2)$. Очевидно, $|J_g(x)| = 1$ и $g^2(x) = x$ для всех $x \in Q$, а также $g \in C^\infty$ и $g(Q) = Q$.

Автор благодарен проф. А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и постоянное внимание. Автор благодарен проф. В. И. Власову и Р. В. Шамину за обсуждение и ряд ценных советов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00256.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Белан Е. П. О бифуркации периодических решений в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Ученые записки ТНУ. Сер. мат. мех. информ. и киберн. — 2002. — 2. — С. 11–23.
- [2] Белан Е. П., Лыкова О. Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Нелінійні коливання. — 2006. — 9, № 2. — С. 155–169.
- [3] Варфоломеев Е. М. Нормальность эллиптического функционально-дифференциального оператора с двумя преобразованиями переменных // Spectral and evolution problems. Труды 16-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. — 2006. — 16. — С. 118–122.
- [4] Варфоломеев Е. М. О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка // Успехи мат. наук. — 2006. — 61, № 1. — С. 173–174.
- [5] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
- [6] Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 1993. — 33, № 1. — С. 69–80.

- [7] *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Успехи мат. наук. — 1996. — 51, № 1 (307). — С. 169-170.
- [8] *Скубачевский А. Л.* О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1997. — 31, № 4. — С. 60-65.
- [9] *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 10. — С. 1394-1401.
- [10] *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics. Proc. SPIE, ed. R. Roy. — 1993. — 2039. — С. 342-352.
- [11] *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equation arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — 32, № 2. — С. 261-278.
- [12] *Varfolomeyev E. M.* On the existence of orthonormal basis consisting of eigenfunctions of elliptic functional differential operators// Funct. Differ. Equ. — 2006. — 13, № 2. — С. 267-304.
- [13] *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., R. L. Abernathy* Diffractive patterns in nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos Solitons Fractals. — 1994. — 4. — С. 1701-1716.
- [14] *Vorontsov M. A., Ivanov V. Yu., Smalhausen V. I.* Rotary instability in the spatial structure of light fields in nonlinear media with two-dimensional feedback// Laser Optics in Condensed Matter. — New York, Plenum Press. — 1988. — С. 507-517.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННОГО ДЕЛЕЖА В КОНТРСТРАТЕГИЯХ ¹

В статье установлено существование гарантированного по выигрышам и рискам решения в кооперативной игре двух лиц с побочными платежами и дискриминацией неопределенности.

In this paper we consider cooperative games with side payments under uncertainty. We formalize and prove existence of such game solution, guaranteed for winnings and risks.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i^Y\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x(y), y)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (1)$$

Здесь 1 и 2 — порядковые номера игроков, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ — множество неопределенностей y , о реализациях которых игроки не имеют никаких статистических данных, но известны границы их изменения. Например, в экономических задачах "роль" неопределенностей могут выполнять погодные условия, неожиданные скачки арендной платы и транспортных издержек, непредсказуемые колебания цен на нефть или другие энергоресурсы и т.п. Множество допустимых "действий" i -го игрока $X_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ ($i = 1, 2$). Элементами X_i могут быть, например, цены (устанавливаемые продавцом), объемы выпуска продукции, премии, штрафы и другие меры поощрения и наказания. Стратегии (контрстратегии) i -го игрока $x_i(y) \in X_i^Y$ ($i = 1, 2$) отождествляются с непрерывными функциями $x_i(y) : Y \rightarrow X_i$ ($i = 1, 2$), т.е. $x_i(\cdot) \in C_{n_i}(Y, X_i)$. В частности, если $x_i(y) = \text{const}$ при $\forall y \in Y$, то (1) превращается в игру

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, Y, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle, \quad (2)$$

с чистыми стратегиями неопределенностями.

Свойствам гарантированного по выигрышам и рискам решения игры (2) была посвящена работа [1].

Игра (1) происходит следующим образом. Игроки путем переговоров согласованно выбирают свои стратегии $x_i(y) \in C_{n_i}(Y, X_i)$, в результате чего складывается ситуация $x(y) = (x_1(y), x_2(y)) \in X^Y = (X_1 \times X_2)^Y$. Одновременно с этим и независимо от выбора игроков реализуется одна из неопределенностей $y \in Y$, о чем сообщается игрокам. Поэтому игре (1) присуще свойство *информационной дискриминации неопределенности*. С помощью реализовавшейся неопределенности y игроки вычисляют значения своих стратегий $x_i = x_i(y) \in X_i$ ($i = 1, 2$). На образовавшихся в результате парах $(x(y), y)$ определена скалярная функция выигрыша i -го игрока $f_i(x, y) : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$), значение которой при реализовавшейся неопределенности y и вычисленной по этой неопределенности ситуации $x = x(y) = (x_1(y), x_2(y)) \in X$ называется *предварительным выигрышем i -го игрока*. *Предварительным риском* [2] i -го игрока будем называть значение функции риска

$$\Phi_i(x, y) = f_i(x^P(y), y) - f_i(x, y) \quad (i = 1, 2),$$

где $x^P(y)$ есть при каждом $y \in Y$ максимальная по Парето (эффективная) альтернатива [3, с.31] в двухкритериальной задаче

$$\langle X, \{f_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle. \quad (3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №05-01-00419)

В [2, с.161] установлен следующий факт:

Лемма 1. Если множества X_i ($i = 1, 2$) выпуклые компакты, Y есть компакт, каждая из функций $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывна на $X \times Y$ и строго вогнута по x при каждом $y \in Y$, то функции $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывны на $X \times Y$.

Функция риска численно оценивает риск игрока в том, что он выбрал свою стратегию из ситуации x , а не из $x^P(y)$, хотя последняя и доставляет векторный максимум в двухкритериальной задаче (3).

На втором этапе игры игроки согласованно перераспределяют между собой суммарный предварительный выигрыш $f_1(x(y), y) + f_2(x(y), y)$ и суммарный предварительный риск $\Phi_1(x(y), y) + \Phi_2(x(y), y)$. При этом выигрыши суммируются только с выигрышами, а риски - с рисками.

На "содержательном уровне", целью i -го игрока является выбор такой своей стратегии $x_i(\cdot) \in C_{n_i}(Y, X_i)$ ($i = 1, 2$) и такое последующее согласованное перераспределение между игроками выигрышей и рисков, чтобы его окончательный выигрыш был по возможности больше, а окончательный риск по возможности меньше. Одновременно с этим, перераспределенные выигрыши и риски должны быть не хуже тех, которые каждый игрок мог достичь, действуя самостоятельно, независимо от остальных. При этом подчеркнем, что выбирая свою стратегию, игроки должны ориентироваться на возможность реализации любой неопределенности y из Y .

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ГАРАНТИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ

При каждом $y \in Y$ для функций выигрыша $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) построим следующие максимины

$$f_1^0[y] = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} f_1(x_1, x_2, y),$$

$$f_2^0[y] = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2, y).$$

Аналогично для функций риска $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) далее используем следующие минимаксы

$$\Phi_1^0[y] = \min_{x_1 \in X_1} \max_{x_2 \in X_2} \Phi_1(x_1, x_2, y),$$

$$\Phi_2^0[y] = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} \Phi_2(x_1, x_2, y), \quad \forall y \in Y.$$

В [1, с.143] установлено, что если $X_i \in \text{comp } \mathbb{R}^{n_i}$, $Y \in \text{comp } \mathbb{R}^m$, функции $f_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ непрерывны на $X \times Y$, то функции $f_i^0[y]$ и $\Phi_i^0[y]$ ($i = 1, 2$) непрерывны на Y .

Фиксируем некоторую неопределенность $y \in Y$ и введем множества $\bar{X}(y)$ и $\bar{\bar{X}}(y)$ ситуаций, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности для функций выигрыша $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) и риска $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) соответственно, именно,

$$\bar{X}(y) = \{x \in X : f_i(x, y) \geq f_i^0[y] \quad (i = 1, 2)\}, \quad (4)$$

$$\bar{\bar{X}}(y) = \{x \in X : \Phi_i(x, y) \leq \Phi_i^0[y] \quad (i = 1, 2)\} \quad \forall y \in Y.$$

В [1, с.144] показано, что множества $\bar{X}(y)$ и $\bar{\bar{X}}(y)$ совпадают при каждом $y \in Y$, и что $\bar{X}(y)$ не пусто при каждом $y \in Y$ при обычных для теории игр условиях ($f_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывны на произведении компактов $X \times Y$).

Лемма 2. [4, с.118] При каждом $y \in Y$ множество $\bar{X}(y)$ есть компакт в $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$.

Ниже используются вектора $f = (f_1, f_2)$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ и предполагается, что функции $f_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывны на произведении компактов $X \times Y$.

Определение 1. Гарантированным по выигрышам и рискам решением (ГВР) кооперативной игры двух лиц с побочными платежами и "дискриминацией" неопределенности (1) называется тройка $(x^*(y), f^*, \Phi^*) \in X^Y \times \mathbb{R}^4$ такая, что существует неопределенность $y^* \in Y$, при которой выполнены следующие три условия:

1⁰. условие коллективной рациональности:

$$\max_{x \in X} \sum_{i=1}^2 f_i(x, y) = \sum_{i=1}^2 f_i(x^*(y), y), \quad \forall y \in Y; \quad (5)$$

2⁰. условие "неухудшаемости" суммарного выигрыша и риска:

$$\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^2 [f_i(x^*(y), y) - \Phi_i(x^*(y), y)] = \sum_{i=1}^2 [f_i(x^*(y^*), y^*) - \Phi_i(x^*(y^*), y^*)]; \quad (6)$$

3⁰. условие индивидуальной рациональности:

имеет место система из четырех неравенств

$$f_i^* \geq f_i^0[y^*], \quad \Phi_i^* \leq \Phi_i^0[y^*] \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

где

$$\sum_{i=1}^2 f_i(x^*(y^*), y^*) = \sum_{i=1}^2 f_i^* \quad \bigwedge \quad \sum_{i=1}^2 \Phi_i(x^*(y^*), y^*) = \sum_{i=1}^2 \Phi_i^*;$$

при этом пару $f^* = (f_1^*, f_2^*)$ назовем гарантированным векторным дележом, парю $\Phi^* = (\Phi_1^*, \Phi_2^*)$ — гарантированным векторным риском, а $x^*(y)$ — ситуацией, гарантирующей эти дележи и риски.

Замечание 1. Ситуация $x^*(y)$ из (5) удовлетворяет условию коллективной рациональности для суммы функций риска, то есть

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^2 \Phi_i(x, y) = \sum_{i=1}^2 \Phi_i(x^*(y), y) \quad \forall y \in Y.$$

Доказательство этого факта в [1, с.145].

Замечание 2. Из условия 3⁰ определения 1 и [1, с.146] следует, что при использовании игроками ситуации $x^*(y)$ и реализации любой неопределенности $y \in Y$ выигрыши игроков $f_i(x^*(y), y)$ ($i = 1, 2$) не могут стать одновременно меньше соответствующих компонент f_i^* вектора $f^* = (f_1^*, f_2^*)$, а риски $\Phi_i(x^*(y), y)$ ($i = 1, 2$) одновременно больше Φ_i^* — компонент гарантированного векторного риска $\Phi^* = (\Phi_1^*, \Phi_2^*)$. В этом состоит "гарантирующий смысл" условия (6).

Замечание 3. В отличие от определения 2.1 из [1, с.144], введенное здесь ГВР $(x^*(y), f^*, \Phi^*)$ удовлетворяет условию коллективной рациональности при каждом $y \in Y$ (в [1] это требование выполнялось лишь при $y = y^*$).

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГВР

Установим условия существования введенного решения. Очевидно следующее утверждение

Лемма 3. Если $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывны на $X \times Y$ и строго вогнуты по x при каждом $y \in Y$, то сумма $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ также непрерывна на $X \times Y$ и строго вогнута по $x \in X$ при каждом $y \in Y$.

Теорема 1. Если

1) множество X — выпуклый компакт, Y — компакт,

2) функции $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) непрерывны на $X \times Y$ и строго вогнуты по x при каждом фиксированном $y \in Y$,
то для игры (1) существует гарантированное по выигрышам и рискам решение.

Доказательство. Для каждого $y \in Y$ построим множество

$$\tilde{X}(y) = \{x : x = \arg \max_{x \in X} \sum_{i=1}^2 f_i(x, y)\}$$

и рассмотрим многозначное отображение

$$\chi(y) : y \rightarrow \tilde{X}(y), \quad \forall y \in Y. \quad (8)$$

Согласно лемме 3 функция $f_1(x, y) + f_2(x, y)$ строго вогнута по $x \in X$ при каждом $y \in Y$. Тогда, как показано в [2, с.61], при выполнении условий 1) и 2) многозначное отображение (8) имеет непрерывный на Y селектор $x^*(y)$, то есть существует непрерывная на Y ситуация $x^*(y) : X \rightarrow Y$, удовлетворяющая условию 1⁰ приведенного выше определения ГВР.

По лемме 1, из непрерывности на $X \times Y$ и строгой вогнутости по $x \in X$ при каждом $y \in Y$ функций выигрыша $f_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) следует, что непрерывны на $X \times Y$ и функции риска

$$\Phi_i(x, y) = f_i(x^P(y), y) - f_i(x, y) \quad (i = 1, 2).$$

Наконец, функция

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^2 [f_i(x^*(y), y) - \Phi_i(x^*(y), y)]$$

непрерывна на Y как разность и суперпозиция непрерывных на компакте Y функций.

В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная на компакте Y функция $\varphi(y)$ достигает своего минимума в некоторой точке $y^* \in Y$. Таким образом существует неопределенность $y^* \in Y$, при которой выполняется условие "неухудшаемости" суммарного выигрыша и риска

$$\min_{y \in Y} \sum_{i=1}^2 [f_i(x^*(y), y) - \Phi_i(x^*(y), y)] = \sum_{i=1}^2 [f_i(x^*(y^*), y^*) - \Phi_i(x^*(y^*), y^*)].$$

Возможность перераспределения дележей и рисков, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности, установлена в [1, с.145].

Таким образом доказано существование пары $(x^*(y), y^*)$, для которой выполняются требования 1⁰ – 3⁰ определения ГВР. По этой паре само гарантированное по выигрышам и рискам решение игры (1) примет вид $(x^*(y), f^*, \Phi^*)$, где $f^* = (f_1^*, f_2^*)$, $\Phi^* = (\Phi_1^*, \Phi_2^*)$, f_i^* и Φ_i^* ($i = 1, 2$) существуют согласно [1, с.145].

Замечание 4. Приведенная теорема имеет место и для кооперативных игр с любым числом участников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. Одна кооперативная игра с побочными платежами и учетом рисков. // Spectral and evolution problems: Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2005), Vol.16, P. 142-148, Simferopol, 2006.
- [2] Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. М.: Едиториал УРСС, 272 с., 2004.
- [3] Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето - оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 256 с., 1982.
- [4] Жуковский В.И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 334 с., 1999.

О КРАТНОСТИ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ФЛОКЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена исследованию условий гиперболичности периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1)) \quad (1)$$

где функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Определение гиперболичности дается в терминах собственных значений оператора монодромии (ненулевые собственные значения оператора монодромии называются мультипликаторами Флоке). При этом существенно новым является подход к исследованию кратности мультипликаторов Флоке. Этот подход позволил отказаться от использовавшихся ранее дополнительных ограничений (см. теорему 3.1 в [5]).

Мы будем изучать T -периодическое осциллирующее решение $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (1), предполагая, что оно нам известно. Мы будем также предполагать, что период T рациональный и $T \neq 0$. (Если $T = 1$, то решение $\tilde{x} = \text{const}$, т. к. удовлетворяет скалярному автономному обыкновенному дифференциальному уравнению. В таком случае $\tilde{x}$ не осциллирует.)

Оператор монодромии — это линейное непрерывное отображение $\mathcal{M} : C([-1, 0], \mathbb{C}) \rightarrow C([-1, 0], \mathbb{C})$, где $C([-1, 0], \mathbb{C})$ обозначает пространство непрерывных комплекснозначных функций с нормой $\|\phi\|_{C([-1, 0], \mathbb{C})} = \max_{t \in [-1, 0]} |\phi(t)|$ (пространство $C([-1, 0], \mathbb{R})$ вещественнозначных функций определяется аналогично). Оператор $\mathcal{M}$ действует по формуле

$$\mathcal{M}\phi = v_T^\phi,$$

где $v^\phi : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — решение начальной задачи

$$v'(t) = \mu v(t) + \alpha(t)v(t-1), \quad (2)$$

$$v(t) = \phi(t) \quad (t \in [-1, 0]), \quad (3)$$

где

$$\alpha(t) = f'(\tilde{x}(t-1)) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (4)$$

Уравнение (2) является линеаризацией уравнения (1) в окрестности периодического решения $\tilde{x}$. Оно называется также вариационным уравнением.

При $kT > 1$ операторы $\mathcal{M}^k$ являются компактными операторами. Поэтому все точки $\lambda \neq 0$ спектра $\sigma(\mathcal{M})$ оператора монодромии являются изолированными собственными значениями и их алгебраические кратности $m(\lambda)$ конечны. Эти собственные значения называются мультипликаторами Флоке. Сужение функции $\tilde{x}'$ на отрезок $[-1, 0]$, очевидно, является собственной функцией оператора монодромии, которой соответствует собственное значение $\lambda = 1$.

Периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения (1) называется гиперболическим, если собственное значение $\lambda = 1$ оператора монодромии является простым и на единичной окружности нет других собственных значений. Траектории, соответствующие решениям уравнения (2), определенные на бесконечных полуинтервалах и близкие к периодической орбите гиперболического решения, стремятся к этой орбите при $|t| \rightarrow \infty$ (см. [4, гл. XIV]).

Исследованию мультипликаторов Флоке посвящено много работ (см. библиографию в [1]). Трудность заключается в том, что в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений оператор монодромии, ассоциированный с периодическим решением функционально-дифференциального уравнения, является бесконечномерным. Конструктивные результаты, позволяющие проверить условия гиперболичности были получены лишь в очень частных случаях: когда период решения равен 3 (см. [2]) и когда период решения равен 4 (см. [3]). Впервые для произвольного рационального периода как необходимые так и достаточные условия гиперболичности были получены в работах [1, 5] (в работе [5] был рассмотрен также случай иррационального периода). В настоящей статье в отсутствии дополнительных ограничений будет получен критерий гиперболичности периодических решений с рациональным периодом.

В разделе 2 будет доказано, что уравнение $(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0$ эквивалентно краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (теорема ??). На основе этой эквивалентности там же будет получен критерий гиперболичности периодического решения уравнения (1) (теорема 2).

Через I будем обозначать единичный оператор. Ядро линейного оператора L обозначаются через $\mathcal{N}(L)$.

2. КРИТЕРИЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

В этом разделе, предполагая $T \in \mathbb{N}$, мы установим связь между функциями из $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2)$ при $\lambda \neq 0$ и решениями линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе этой системы мы получим критерий простоты для собственных значений оператора монодромии и, затем, критерий гиперболичности для периодических решений уравнения (1) с рациональным периодом.

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{M} - \lambda I)^2 \phi = 0. \quad (5)$$

Функция ϕ является решением уравнения (5) тогда и только тогда, когда пара функций (ϕ, v^ϕ) является решением системы уравнений (5), (2), (3). При этом решение уравнения (2) нам необходимо знать только при $t \in (-1, 2T)$.

Воспользуемся соизмеримостью периода и запаздывания. Представим число $T \in \mathbb{N}$ в виде дроби $T = N/M$ и положим $\tau = 1/M$. Тогда $1 = M\tau$, $T = N\tau$. В системе, состоящей из уравнений (5), (2), (3), произведем следующую замену переменных:

$$u_i(t) = v(t + (i - 1)\tau) \quad (i = 1 - M, \dots, 0, 1, \dots, 2N, t \in [0, \tau]). \quad (6)$$

При этом из уравнения (3) получаем

$$\phi(t) = u_i(t - (i - 1)\tau) \quad (t \in [i\tau - \tau, i\tau], i = 1 - M, \dots, 0), \quad (7)$$

а уравнения (5) и (2) превратятся в следующие системы уравнений соответственно:

$$u_i(t) = 2u_{i+N}(t)/\lambda - u_{i+2N}(t)/\lambda^2 \quad (i = 1 - M, \dots, 0, t \in [0, \tau]), \quad (8)$$

$$u'_i(t) = \mu u_i(t) + \alpha(t + (i - 1)\tau)u_{i-M}(t) \quad (i = 1, \dots, 2N, t \in (0, \tau)). \quad (9)$$

Если пара функций (ϕ, v) удовлетворяет системе уравнений (5), (2), (3), то определенные по формуле (6) функции u_i удовлетворяют системе уравнений (8) и (9).

Обратное неверно. Если функции $u_{1-M}, \dots, u_{2N}$ удовлетворяют системе уравнений (8) и (9), то пара функций (ϕ, v) , определенных в соответствии с формулами (7) и (6), обязаны удовлетворять системе уравнений (5), (2), (3) лишь на интервалах $(i\tau, i\tau + \tau)$, где $i = -M, \dots, 2N - 1$. На концах интервалов эти функции могут иметь разрыв. Используя формулу (6), условие непрерывности функции v (а, следовательно, и ϕ , см. уравнение (3)) в этих точках можно записать в виде

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \quad (i = 2 - M, \dots, 2N). \quad (10)$$

Легко видеть, что система уравнений (5), (2), (3) эквивалентна (с учетом замены переменных (6) и (7)) системе уравнений (8), (9), (10).

Формула (8) при $i \in \{-\min\{N, M\}, \dots, 0\}$ дает представление функций u_i через функции $u_1, \dots, u_{2N}$. Допустим, что $M > N$ и $i_0 \in \{-M, \dots, -N\}$. Рассмотрим равенство (8) при $i = i_0$ и к первому слагаемому правой части применим равенство (8) при $i = i_0 + N$:

$$u_{i_0} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{2u_{i_0+2N}}{\lambda} - \frac{u_{i_0+3N}}{\lambda^2} \right) - \frac{u_{i_0+2N}}{\lambda^2} = \frac{(2 \cdot 2 - 1)u_{i_0+2N}}{\lambda^2} - \frac{2u_{i_0+3N}}{\lambda^3}.$$

Если $M > kN$ и при $i_0 \in \{-M, \dots, -kN\}$ имеет место равенство

$$u_{i_0} = \frac{(a_k + 1)u_{i_0+kN}}{\lambda^k} - \frac{a_k u_{i_0+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}},$$

то, аналогичным образом используя $(i_0 + kN)$ -е уравнение системы (8), получаем

$$u_{i_0} = \frac{(a_k + 2)u_{i_0+(k+1)N}}{\lambda^{k+1}} - \frac{(a_k + 1)u_{i_0+(k+2)N}}{\lambda^{k+2}}.$$

Применяя метод математической индукции, перепишем систему (8) в виде

$$u_i = \frac{(k_i + 1)u_{i+k_iN}}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i+(k_i+1)N}}{\lambda^{k_i+1}} \quad (i = 1-M, \dots, 0, \quad k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}). \quad (11)$$

Эта система эквивалентна системе (8) и дает явное представление функций $u_{1-M}, \dots, u_0$ через функции $u_1, \dots, u_{2N}$.

Используя представление (11) и то, что формально при $i > 0$ равенство (11) имеет вид $u_i = u_i$ (в этом случае $k_i = 0$), исключим функции $u_{-M+1}, \dots, u_0$ из уравнений (9):

$$u'_i(t) = \mu u_i(t) + \alpha(t + (i-1)\tau) \left(\frac{(d_i + 1)u_{i-M+d_iN}(t)}{\lambda^{d_i}} - \frac{d_i u_{i-M+(d_i+1)N}(t)}{\lambda^{d_i+1}} \right), \quad (12)$$

$$i = 1, \dots, 2N, \quad d_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i - M + pN > 0\}, \quad t \in (0, \tau).$$

Таким образом, система (8), (9) эквивалентна системе (11), (9).

Используя представление (11) при $i = 0$ в формуле (10) для $i = 1$, получаем

$$u_1(0) = 2u_N(\tau)/\lambda - u_{2N}(\tau)/\lambda^2. \quad (13)$$

Зафиксируем произвольное значение $i \in \{2-M, \dots, 0\}$ и положим $k = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$. Если $i \neq 1 - kN$, то, используя представление (11), получим

$$u_i(0) - u_{i-1}(\tau) = (k+1) \frac{u_{i+kN}(0) - u_{i+kN-1}(\tau)}{\lambda^k} - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0) - u_{i+(k+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+1}}.$$

Если же $i = 1 - kN$, то, используя представление (11) и формулу (13), получим

$$\begin{aligned} u_i(0) &= (k+1) \frac{u_{i+kN}(0)}{\lambda^k} - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} = \\ &= \frac{k+1}{\lambda^k} \left(\frac{2}{\lambda} u_{i+(k+1)N-1}(\tau) - \frac{1}{\lambda^2} u_{i+(k+2)N-1}(\tau) \right) - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} = \\ &= \frac{k+2}{\lambda^{k+1}} u_{i+(k+1)N-1}(\tau) - \frac{k+1}{\lambda^{k+2}} u_{i+(k+2)N-1}(\tau) + \\ &+ k \frac{u_{i+(k+1)N-1}(\tau)}{\lambda^{k+1}} - k \frac{u_{i+(k+1)N}(0)}{\lambda^{k+1}} = u_{i-1}(\tau) + \frac{k}{\lambda^{k+1}} (u_N(\tau) - u_{N+1}(0)). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения (10) при $i = 2-M, \dots, 0$ являются следствиями других уравнений системы (10), (11), (13) и их можно исключить из этой системы. Следовательно, в формуле (10) будут использоваться только уравнения

$$u_i(0) = u_{i-1}(\tau) \quad (i = 2, \dots, 2N). \quad (14)$$

Из сказанного следует, что система уравнений (5), (2), (3) эквивалентна (с учетом замены переменных (6) и (7)) системе уравнений (11), (12), (13), (14). Иначе говоря, для каждого решения уравнения (5) по формуле

$$u_i(t) = v^\phi(t + (i-1)\tau) \quad (t \in [0, \tau])$$

однозначно определяется некоторое решение $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ краевой задачи (12), (13), (14); при этом функции ϕ и U удовлетворяют соотношению (являющемуся следствием формул (7) и (11))

$$\phi(t) = \frac{(k_i + 1)u_{i-k_i N}(t - (i-1)\tau)}{\lambda^{k_i}} - \frac{k_i u_{i-(k_i+1)N}(t - (i-1)\tau)}{\lambda^{k_i+1}},$$

где $k_i = \min\{p \in \mathbb{N} : i + pN > 0\}$, $i = 1 - M, \dots, 0$, $t \in [i\tau - \tau, i\tau]$, и для любого решения $U = (u_1, \dots, u_{2N})^T$ краевой задачи (12), (13), (14) при помощи последнего соотношения восстанавливается соответствующее решение ϕ уравнения (5). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *При $\lambda \neq 0$ множество решений уравнения (5) изоморфно множеству решений краевой задачи (12), (13), (14).*

Рассмотрим краевую задачу (12), (13), (14). Любое решение этой задачи можно представить в виде

$$U(t) = S_\lambda(t)c,$$

где $S_\lambda : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{C}^{2N \times 2N}$ — фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12). Чтобы найти вектор $c \in \mathbb{C}^{2N}$, достаточно подставить общий вид решения в краевые условия (13), (14). Через $e_{\lambda j}$ обозначим j -ю строку матрицы S_λ . Для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ введем матрицу $Q(\lambda) \in \mathbb{C}^{2N \times 2N}$,

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} e_{\lambda 1}(0) - \frac{2e_{\lambda N}(\tau)}{\lambda} + \frac{e_{\lambda, 2N}(\tau)}{\lambda^2} \\ e_{\lambda 2}(0) - e_{\lambda 1}(\tau) \\ \dots\dots\dots \\ e_{\lambda, 2N}(0) - e_{\lambda, 2N-1}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тогда вектор c является решением уравнения

$$Q(\lambda)c = 0.$$

Поскольку фундаментальная матрица невырождена, то при каждом $\lambda \neq 0$ матричная функция $S_\lambda(\cdot)$ осуществляет изоморфизм между нуль-пространством матрицы $Q(\lambda)$ и множеством решений краевой задачи (12), (13), (14).

Таким образом, из леммы 1 следует, что множество решений уравнения (5) изоморфно нуль-пространству матрицы $Q(\lambda)$. Обозначим $N_q = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \det Q(\lambda) = 0\}$.

Теорема 1. *Если $\lambda \neq 0$, то имеет место равенство $\dim \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 2N - \text{rank} Q(\lambda)$. В частности, $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$.*

Лемма 2. *Алгебраическая кратность ненулевого собственного значения λ оператора монодромии равна единице тогда и только тогда, когда $\text{rank} Q(\lambda) = 2N - 1$.*

Доказательство. Алгебраической кратностью $m(\lambda)$ собственного значения λ оператора $\mathcal{M}$ называется размерность пространства $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k)$, где $k \in \mathbb{N}$ — такое число, что $\mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^k) = \mathcal{N}((\mathcal{M} - \lambda I)^{k+1})$. Если $m(\lambda) = 1$, то очевидно $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$. Если $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)^2) = 1$, то легко доказать, что $\dim(\mathcal{N}(\mathcal{M} - \lambda I)) = 1$ и, следовательно, $m(\lambda) = 1$. Остается применить теорему 1.

Теорема 2. *Пусть существует T -периодическое решение $\tilde{x}$ уравнения (1), и пусть число N определено выше. Решение $\tilde{x}$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда $\{\lambda \in N_q : |\lambda| = 1\} = \{1\}$ и $\text{rank} Q(1) = 2N - 1$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\sigma(\mathcal{M}) \setminus \{0\} = N_q$. Т. е. оператор $\mathcal{M}$ имеет на единичной окружности единственное собственное значение $\lambda = 1$ тогда и только тогда, когда $\{\lambda \in N_q : |\lambda| = 1\} = \{1\}$. Из леммы 2 следует, что собственное значение $\lambda = 1$ оператора монодромии — простое тогда и только тогда, когда $\text{rank} Q(1) = 2N - 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вальтер Х.-О., Скубачевский А. Л. О мультипликаторах Флоке для медленно осциллирующих периодических решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений// Труды ММО 2003. Том 64. Стр. 3-53.
- [2] O. Arino, A. Chérif, More on ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations// J. Mathematical Analysis and Applications. 1993. V.180. № 2. P.361-385.
- [3] Chow S. N., Walther H.-O. Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of $\dot{x}(t) = g(x(t-1))$ // Transactions of the A.M.S. 1988. V.307. №1. P. 127-142.
- [4] Diekmann O., van Gils S., Verduyn Lunel S. M., and Walther H.O., Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis, Springer, New York, 1995.
- [5] Skubachevskii A.L., Walther H.-O. On the Floquet multipliers of periodic solutions to nonlinear functional differential equations// J. of Dynamics and Differential Equations 2006. V. 18, №2. P 257-355.

ГУРОВ С.И., ДОЛОТОВА Н.С., ФАТХУТДИНОВ И.Н.

«НЕКОМПАКТНЫЕ» ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ. ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ПО Э.ГИЛЬБЕРТУ¹

В первой части работы описан опыт построения программной системы, определяющей области компетентности алгоритмов синтеза логических схем. При этом решается задача классификации с невыполненной гипотезой компактности. Во второй части описан новый алгоритм синтеза комбинационно-логических схем на основе разложения Э.Гильберта.

1. ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день существуют значительное количество алгоритмов логического синтеза комбинационно-логических схем реализованных в составе ряда САПР и основанных на тех или иных точных либо эвристических методах. Однако, в связи с резким ужесточением параметров вновь проектируемых схем (до 1 млрд ключей на кристалле, размер ключа менее 50 нм) алгоритмы синтеза перестают удовлетворять предъявляемым требованиям по качеству получаемой схемы. Поэтому на повестке дня стоит разработка принципиально новых типов указанных алгоритмов т.н. алгоритмов синтеза нового поколения. Данные алгоритмы должны осуществлять синтез отдельных частей сложной логической схемы исходя из дифференцированных критериев. Как известно, различные синтезирующие алгоритмы демонстрируют различную эффективность на различных типах схем. Кроме того, данная эффективность может определяться исходя из ряда критериев (площадь, занимаемая схемой на кристалле, общая задержка по критическому пути, потребляемая мощность и т.д.).

Первая часть доклада описан опыт построения программной системы, определяющей области компетентности алгоритмов синтеза логических схем. Во второй части рассмотрен новый перспективный алгоритм синтеза комбинационно-логических схем, основанный на разложении булевых функций, предложенном Э.Гильбертом.

2. «НЕКОМПАКТНЫЕ» ЗАДАЧИ РАСПОЗНАВАНИЯ

2.1. Введение. Первым шагом на пути создания САПР с синтезирующими алгоритмами нового типа может быть разработка программной системы, определяющей по предъявленному входному описанию схемы некоторые характеристики и, в зависимости от них, принимающая решение, какому из имеющихся алгоритмов “поручить” синтез схемы. При разработке описанной системы возникают задачи построения признакового пространства описаний схем и разбиения его на части, принадлежность к которым определяет выбор синтезирующего алгоритма. В теории распознавания образов указанные части называют областями компетентности алгоритмов, в нашем случае — алгоритмов синтеза комбинационно-логических схем.

2.2. Области компетентности и гипотеза компактности. *Областью компетентности алгоритма* называют подмножество пространства характеристик входного описания объектов (комбинационных логических схем, в нашем случае), для которых данный алгоритм оптимален по выбранному критерию. Задачу формирования признакового пространства на практике всегда приходится решать эмпирически. Дело осложняется тем, что наша задача относится к задачам с невыполненной гипотезой компактности, когда классифицируемые объекты из разных классов

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проекта 04-01-00161, 07-01-00211) и Intel Technologies, Inc.

сильно перемешаны и «образы не составляют компактных множеств в пространстве выбранных свойств». Данные задачи чрезвычайно трудны и на практике часто отказываются от их решения формальными методами.

В тоже время, в самом начале становления теории распознавания одним из её создателей М.Бонгардом [3] был предложен метод формирования пространства признаков и решения задач с невыполненным условием компактности: в работе было продемонстрировано на примере, что такие задачи в принципе могут быть решены.

2.3. Постановка задачи. Под Ω будем понимать множество всевозможных описаний входных объектов в некоторой стандартной форме, а под Λ — конечное множество алгоритмов обработки указанных объектов. Пусть $S(A, \delta_0)$ — функционал качества полученного выходного объекта в результате обработки входного объекта $\delta_0 \in \Omega$ алгоритмом $A \in \Lambda$. Требуется построить пространство и разбить его на области компетентности алгоритмов A (из Λ). Иными словами, определить $A_0 = \text{Arg min } S(A, \delta_0)$ для произвольного описания δ_0 из построенного пространства Ω , где минимум берётся по всем $A \in \Lambda$.

В нашем случае Ω есть множество описаний систем частичных булевых функций (СЧБФ) в формате системы синтеза схем SIS (см. [7]), Λ — совокупность реализованных в SIS алгоритмов синтеза СЧБФ в виде схем (19 алгоритмов), а в качестве $S(A, \delta)$ взята количественная оценка площади синтезированной схемы.

2.4. Классификация и гипотеза представительности. Понятно, что функции из СЧБФ подлежащих минимизации и схемной реализации на практике далеко не случайны, поскольку они описывают комбинационные части логических блоков, имеющих определённую логику работы. Также интуитивно ясно, что имеются различные типы таких СЧБФ. В то же время замечено, что зачастую небольшие изменения в описаниях функций приводят к радикальному изменению их схемного представления. Это означает, что описание СЧБФ в некотором «естественном» пространстве не обеспечивает выполнение гипотезы компактности образов.

Далее мы не будем различать объекты и их описания. Напомним, что объект с известной классификации называется в теории распознавания прецедентом. Для решения поставленной задачи необходим набор прецедентов — описаний схем с результатами синтеза всеми имеющимися алгоритмами. Эта информация и является основной для решения задачи.

Ясно, что решение задачи возможно, если набор имеющихся прецедентов некоторым образом отражает объекты, которые реально будут встречаться при осуществлении классификации. Данное предположение называется в теории распознавания *гипотезой представительности*.

2.5. Идея метода М.Бонгарда. При невыполненной гипотезе компактности (ситуация «губки и воды» по выражению автора метода) предлагается действовать следующим образом.

- (1) Тем или иным способом сформировать некоторый набор произвольных первичных признаков — числовых характеристик объектов. Эти признаки, вообще говоря, не позволяют успешно решить задачу классификации (разбиение признакового пространства).
- (2) С помощью выбранных функциональных преобразований из первичных признаков строятся всевозможные выражения, называемые в дальнейшем вторичными признаками. Для первоначального построения нет необходимости пользоваться сложными функциональными преобразованиями и при разработке системы были использованы (как и у М.Бонгарда) простейшие арифметические операции $\{+, -, \times, /\}$.
- (3) Из построенных вторичных признаков для каждого класса (соответствующего одному из алгоритмов синтеза) отбирается некоторое количество наиболее «информативных» признаков. Под таковыми понимаются те, которые

наилучшим образом отделяют конкретный класс от остальных классов (значения на прецедентах конкретного класса сильно отличается от значений на прецедентах из остальных классов признаков).

- (4) Для всех прецедентов строится набор первичных признаков, вычисляются вторичные признаки, производится описанный выше отбор и затем по всем отобраным вторичным признакам устраиваем голосование. В результате все пространство объектов разбивается на классы.

Заметим, что данный метод основывается на полном переборе (при формировании вторичных признаков), что требует, в общем случае, значительных вычислительных затрат. Однако такой большой счёт выполняется единственный раз на этапе обучения.

2.6. Математическая модель. Пусть имеется N алгоритмов минимизации управляющих систем $A_1, A_2, \dots, A_N, \mathfrak{R}_i, i = 1, \dots, N$ — области компетентности алгоритмов. Назовем первичным признаком произвольную функцию от табличного задания СЧБФ.

Пусть $P_1(\delta), P_2(\delta), \dots, P_M(\delta)$ — первичных признаков конкретной СЧБФ δ . Вторичным признаком частично заданной булевой функции δ i -го алгоритма назовем произвольную функцию

$$f_{i,j}(P_1, P_2, \dots, P_M) = f_{i,j}^{+, -, \times, /}(P_1(\delta), P_2(\delta), \dots, P_M(\delta)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где j — номер признака, построенную с помощью арифметических операций $+, -, \times, /$ из первичных признаков.

Область компетентности каждого алгоритма минимизации будем задавать системой неравенств

$$\begin{cases} f_{i,1}(P_1, P_2, \dots, P_M) \leq \text{Const}_{i,1} \\ \dots \\ f_{i,c_i}(P_1, P_2, \dots, P_M) \leq \text{Const}_{i,c_i} \end{cases},$$

где константы $\text{Const}_{i,1}, \dots, \text{Const}_{i,c_i}$ и операция сравнения «больше» или «меньше» выбираются из условия минимизации функционала качества вторичного признака (с привязанной к нему операцией сравнения и константы):

$$Q(F_{i,c_j}) = \sum_{\delta \in \Omega} [F_{i,c_j} - t]^2(\delta) \rightarrow \min,$$

где F_{i,c_j} — индикатор принадлежности объекта δ классу с номером i , строящийся из $f_{i,k}$, операций $>, <$ и $\text{Const}_{i,k}$.

Вообще говоря, любая функция (с ограничениями на существование производных нужного порядка) разложима в ряд Тейлора, что говорит о том, что класс всех функций $\{f^{+, -, \times, /}\}$ достаточно широк.

Введем набор индикаторных функций

$$k_i(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если выполнена система неравенств;} \\ -1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и функцию штрафа

$$U_i(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta \in \mathfrak{R}_i; \\ -1, & \text{если } \delta \notin \mathfrak{R}_i. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$Z_i(\delta) = \frac{1 - K_i(\delta) \cdot U_i(\delta)}{2}.$$

Получается, что

$$Z_i(\delta) = \begin{cases} 0, & \text{если задает предикат } \delta \in \mathfrak{R}_i; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

И, наконец, рассмотрим функционал качества

$$\Phi_i = \sum_{\delta \in \Omega} Z_i(\delta), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Теперь задача построения классификатора свелась к задаче минимизации функционала качества для каждого алгоритма по набору вторичных признаков:

$$\Phi_i \rightarrow \min \quad (3)$$

для всех $i = 1, \dots, N$. Заметим сразу, что поскольку Ω — потенциально бесконечное множество, то программно подсчитать (2) не представляется возможным. Потому на практике приходится ограничиваться предположительно достаточно представительным фиксированным подмножеством множества $\mathcal{R}_i$, составляющее множество Ω прецедентов.

2.7. Построение прецедентной информации. Прецедентная информация (набор СЧБФ) представлялась в виде матриц входа и выхода, строящихся из элементов 0, 1 и —. Матрица входа задает интервал булевых переменных, а матрица выхода — соответствующую интервалу, строку значений набора функций. В качестве прецедентной информации были взяты математические схемы, поставляемые вместе с пакетом SIS, и схемы сгенерированные случайным образом, с использованием нормального, гамма, экспоненциального, бета, пуассоновского, Коши, биномиального распределений. Были схемы сгенерированные с помощью только одного распределения, а так же схемы, которые делились на блоки, каждый из которых сгенерирован с помощью своего распределения из списка, перечисленного выше. Заметим, что самым важным моментом на этом этапе разработки было получение представительной (наиболее общей) выборки.

2.8. Построение первичных признаков. Первичные признаки строились следующим образом.

В матрице входа и выхода конкретной СЧБФ выделяется 5 подобластей: матрица, “разрезанная” на четыре равные части (4 подобласти) и подматрица, образующая прямоугольник, накрывающий центр матрицы.

Для каждой подобласти определялось (называемое в дальнейшем первичным признаком СЧБФ):

- (1) Процентное соотношение количеств символов 0, 1 и — относительно количества элементов в подобластях (3 признака).
- (2) Среднестатистическое положение (математическое ожидание) количеств символов 0, 1 и — в строках и столбцах каждой подобласти, нормализованное по длине строки и столбца соответственно (3×2 признака).
- (3) Среднее отклонение от среднестатистического положения (дисперсия) количеств символов 0, 1 и — в строках и столбцах каждой подобласти, нормализованное по длине строки и столбца соответственно (3×2 признака).

Итого 150 первичных признаков для каждого прецедента.

2.9. Построение и селекция вторичных признаков. Прецедентная выборка разбивается на три равномоощных множества (для отсутствия переобучения методом скользящего контроля). Первое — для построения вторичных признаков и селекции из них наилучших. Второе — для ограничения переобучения. Третье — для оценки качества классификации.

По выбранным 15 первичным признакам строятся все возможные вторичные признаки вида (1), сложность которых (число используемых операций) не превышала четырех. Среди них, для каждого класса, оставляем только те, с помощью которых можно отделить несколько (10 штук) прецедентов этого класса от остальных. При этом прецеденты рассматриваются только из первого множества разбиения.

Далее итеративно во множестве выбранных вторичных признаков (изначально оно пустое) производится операция добавления/удаления признаков. Критерий проведения операции — уменьшение функционала качества (2) на прецедентах второго множества разбиения, т.е. решаем задачу (3).

Данный этап требует основных вычислительных затрат, поэтому нуждается в теоретических исследованиях, с помощью которых можно будет сократить перебор.

2.10. Оценка качества классификатора. Качество алгоритма оценивалась методом скользящего контроля. Для этого из всего множества прецедентов выбирался один объект, который помещался в контрольную выборку, на остальных проходило обучение. После получения оптимального алгоритма классификации (с учетом ограничений — длина вторичного признака не больше 5 и ещё некоторых), проводилась классификация выбранного контрольного объекта. Данная процедура проводилась для каждого объекта из прецедентной информации.

Полученная оценка количества ошибок при классификации (на материале обучения) предложенным алгоритмом составляет приблизительно 5%. В задачах распознавания такой сложности, как решаемая нами, трудно требовать большей точности. Применяя современные методы классификации можно улучшить качество распознавания. Однако это может привести к известному эффекту переобучения, когда классификатор, корректно работающий на схемах "близких" к прецедентам, ведёт себя непредсказуемо на всех остальных объектах.

3. ЛОГИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ Э.ГИЛЬБЕРТА

3.1. Монотонные булевы функции и их свойства. *Монотонной булевой функцией* называется булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$, для которой выполнено:

$$f(a_1, \dots, a_n) \geq f(b_1, \dots, b_n),$$

если $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ такие, что $\forall i = 1 \dots n, a_i \geq b_i$.

Совершенная ДНФ монотонной функции не содержит отрицаний (данное утверждение следует непосредственно из определения), что обеспечивает минимальную задержку при реализации интегральных схем, по сравнению с любой другой функцией от одного и того же количества переменных. Надо отметить, что совершенная ДНФ монотонной функции строится достаточно легко. Для этого достаточно найти множество Ω нижних единиц функции (нижней единицей функции называется такой набор $a_1, \dots, a_n$, что $f(a_1, \dots, a_n) = 1$ и не существует такого набора $b_1, \dots, b_n$, $\forall i = 1, \dots, n, a_i \geq b_i$, что $f(b_1, \dots, b_n) = 1$). Далее остается только записать саму совершенную ДНФ, которая будет выглядеть следующим образом:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega} \bigwedge_{\delta_i=1} x_i.$$

Данные свойства предлагается использовать для синтеза интегральных схем немонотонных булевых функций.

3.2. Постановка задачи. На сегодняшний день к интегральным схемам предъявляются все более и более жесткие требования. Они должны иметь минимальный критический путь, площадь, задержку и т.д. Поэтому постоянно ведется поиск новых методов наилучшего представления булевых функций. В данной работе будет представлен один из возможных подходов к решению проблем синтеза интегральных схем, основанный на свойствах монотонных функций.

Требуется представить частичную булеву функцию с помощью операций конъюнкции и отрицания над монотонными функциями. Существование такого представления непосредственно следует из теоремы Гильберта.

3.3. Теорема Э.Гильберта.

Теорема (Э.Гильберт). *Для любой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ существуют такие монотонные функции $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)$, что*

$$f = \overline{\overline{f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge \dots \wedge f_k}}$$

Доказательство. Обозначим через $M(f)$ множество единичных наборов функции.

Если f — монотонная функция, сразу получается необходимо представление $f = f$. В противном случае выберем монотонную функцию f_1 так, чтобы $M(f) \subset M(f_1)$.

Такую функцию всегда можно подобрать, например, найдя все нижние единицы функции f (множество Ω). Тогда

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega} \bigwedge_{\delta_i=1} x_i.$$

Теперь найдем f^1 из следующего соотношения:

$$f = f_1 \wedge \overline{f^1}$$

Проведя аналогичные рассуждения, для функции f^1 получим монотонную функцию f_2 и $f = f_1 \wedge \overline{f_2 \wedge \overline{f^2}}$ и т.д.

Теперь докажем, что для любой булевой функции существует конечная последовательность монотонных функций, её определяющая. Далее мы докажем два утверждения.

$$(1) M(f) \supset M(f^2).$$

Так как $f = f_1 \wedge \overline{f^1}$, то обязательно

$$f^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } f = 1, \\ 1, & \text{если } f = 0 \text{ и } f_1 = 1, \\ \text{любое значение,} & \text{если } f = f_1 = 0. \end{cases}$$

Определим f^1 следующим способом:

$$f^1 = \begin{cases} 0, & \text{если } f = 1, \\ 1, & \text{если } f = 0. \end{cases}$$

Теперь найдем монотонную функцию f_2 , покрывающую все единицы функции f^1 и построим функцию f^2 , доопределив утверждение (1):

$$f^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } f^1 = 1, \\ 1, & \text{если } f^1 = 0 \text{ и } f_2 = 1, \\ 0, & \text{если } f^1 = f_2 = 0. \end{cases}$$

Что равносильно:

$$f^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } f = 0, \\ 1, & \text{если } f = f_2 = 1, \\ 0, & \text{если } f = 1 \text{ и } f_2 = 0. \end{cases}$$

Так как монотонные функции подбираются так, чтобы они покрывали все нижние единицы исходной функции, то существуют такие наборы, что $f = 1$ и $f_2 = 0$. Следовательно, $M(f) \supset M(f^2)$. Аналогично получаем, $M(f) \supset M(f^2) \supset M(f^4) \dots$

$$(2) M(f^1) \subset M(f^3).$$

Так как f^3 получается после переопределения функции f^2 по правилу (1), а уже доказано, что $M(f) \supset M(f^2)$, то, следовательно, $M(f^1) \subset M(f^3)$ и верно $M(f^1) \subset M(f^3) \subset M(f^5) \dots$

В результате этого выполнены условия $M(f^1) \subset M(f^3) \subset M(f^5) \dots$ и $M(f) \supset M(f^2) \supset M(f^4) \dots$, мы получаем: либо при каком-то нечетном n $f^n = 1$, либо же при четном n $f^n = 0$.

3.4. Предлагаемый алгоритм. Пусть задана всюду определенная булева функция f . Опишем для неё алгоритм построения разложения Гильберта.

- (1) Находим все нижние единицы функции — множество Ω .
- (2) Вычислим f_1 как

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega} \bigwedge_{\delta_i=1} x_i.$$

- (3) Пересчитаем f , и найдем f^1 из соотношения (5).
- (4) Повторив п.1, найдем f_2 .
- (5) После чего пересчитаем f^1 и найдем f^2 из соотношения (6) и т.д.

В результате, как было доказано выше, получим конечную систему булевых функций, однозначно определяющих исходную частичную функцию f .

3.5. Расширение алгоритма на частичные булевы функции. Выше был рассмотрен случай представления всюду определенной булевой функции с помощью монотонных. Однако на практике больший интерес представляет работа с более широким множеством частичных функций. Для работы с данным видом функций можно предложить различные расширения предложенного алгоритма. Ниже приведено одно из них.

- (1) Находим все нижние единицы функции — множество Ω .
- (2) Вычислим $f_1(x_1, \dots, x_n)$ как

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega} \bigwedge_{\delta_i=1} x_i.$$

При этом, если $f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = -$, возможно 3 случая:

- (а) $\exists(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega$ такой, что если $\delta_i = 1$, то $x'_i = 1$. Тогда определим $f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = 1$.
 - (б) $\exists(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega$, что $\hat{x}_i \leq \delta_i$. Тогда доопределим $f(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = 0$.
 - (с) Если набор $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ не сравним ни с одним из наборов $(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \Omega$, тогда на данном шаге доопределять f на $(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ не будем.
- (3) Пересчитаем f , и найдем f^1 из соотношения (5).
 - (4) Повторив п. 1, найдем f_2 . Доопределим f^1 аналогично п.2. Заметим, что на этом шаге функция доопределится хотя бы ещё на 1 наборе по сравнению с предыдущим шагом.
 - (5) После чего пересчитаем f^1 и найдем f^2 из соотношения (6) и т.д.

3.6. Оценка алгоритма. Очевидно, что данный алгоритм не даёт никаких улучшений при синтезе схем монотонных функций. Однако в других случаях возможно уменьшение времени критического пути, площади схемы и количества используемых элементов в схеме.

Результаты синтеза приведены в нижеследующих таблицах.

Таблица 1. Параметры схем, синтезированных предложенным алгоритмом

Название схемы	# входов	# каскадов	# конъюнкций	# дизъюнкций
bench	6	1	8	2
sqn7	6	81	36	5
life	9	2	124	31
P38	2	20	9	1
P18	2	17	7	1
fout	6	4	44	11
luc8	2	8	0	1
Rd73	7	4	15	6
Rd53	5	1	15	5
Sqn2	3	2	4	2
Co14	14	2	1	15
Sym10	10	1	0	0

Таблица 2. Задержка по критического пути (в условных единицах) в схемах, синтезированных стандартными методами из системы SIS и предложенным методом.

Название схемы	Метод SIS	Разложение Гильберта
bench	10.8	11
sqn	9	7
life	11.2	11.4
P3	11.12	11.01
P1	11.09	11.06
fout	10.7	8.9
luc	11.3	11.4
Rd73	10.31	10.4
Rd53	9.2	9.3
Sqn2	7.1	7.5

Таким образом, проведенные исследования, показали, что на ряде примеров данный метод работает лучше, чем существующие алгоритмы синтеза логических схем.

Также данный метод позволяет использовать ряд преобразований, которые могут помочь в улучшении ряда параметров работы алгоритма (например, применение поворота вокруг вектора поляризации), которые не могут использоваться во многих работающих методах синтеза схем функциональных элементов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авдеев Ю.В., Гаврилов С.В., Гуров С.И. и др. *САПР заказных БИС на открытых вычислительных системах* // Электронная техника. Сер. 3. «Микроэлектроника», 1, 1992. – С. 12-21.
- [2] Айзерман М.А., Браверман Э.М., Розоноэр Л.И. *Метод потенциальных функций в теории обучения машин*. – М.: Наука, 1970.
- [3] Бонгард М.М. *Проблема узнавания*. – М.: Наука, 1967.
- [4] Гуров С.И. *Алгоритм получения разложения Э.Н.Гильберта и его реализация для задач синтеза схем* // Прикладная математика и информатика: Труды факультета Вычислительной математики и кибернетики. – М.: МАКС Пресс, № 18, 2004. – С. 108-121.
- [5] Журавлев Ю.И. *Об алгебраических методах в задачах распознавания и классификации* // Распознавание. Классификация. Прогноз. Математические методы и их применение. Вып. 1. – М.: Наука, 1989.
- [6] Ту Дж., Гонсалес Ф. *Распознавание образов*. – М.: Наука, 1978.
- [7] SIS: *A System for Sequential Circuit Synthesis* / Dep. of Electrical Engineering and Computer Science Univ. of California, Berkeley. 1992.
- [8] Э.Н.Гильберт. *Теоретико-структурные свойства замыкающих переключательных функций* // Кибернетический сборник, 1, 1960. – С. 175-188.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХЭЛЕМЕНТНОЙ СМО С ОТКАЗАМИ, ОБСЛУЖИВАЕМОЙ ДВУМЯ НАЛАДЧИКАМИ

Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
СИМФЕРОПОЛЬ, УКРАИНА

Рассмотрим СМО, состоящую из трёх элементов: один управляющий и два подчинённых. Если исправен управляющий и хотя бы один из подчинённых элементов — система работоспособна, в противном случае — неработоспособна. В рабочем состоянии элементы могут выходить из строя. Интенсивность поломки управляющего элемента — β , подчинённого — α .

В случае выхода из строя любого элемента к ремонту немедленно приступает мастер, причем интенсивность ремонта управляющего элемента — $\sigma(y)$, а интенсивность ремонта подчинённого элемента — $\mu(x)$. Если мастер ремонтирует подчинённый элемент и система функционирует, то она может выйти из строя за счёт поломки либо второго подчинённого элемента, либо управляющего элемента. В первом случае к ремонту второго подчинённого элемента приступает стажёр с интенсивностью ремонта $\lambda(z)$, но если мастер раньше стажера завершит ремонт, то он заменяет стажёра и продолжает ремонт второго подчинённого элемента (с сохранением времени, затраченного на ремонт стажёром). Во втором случае мастер начинает ремонтировать управляющий элемент, а стажёр продолжает ремонт подчинённого элемента (с сохранением времени, затраченного на ремонт мастером). Стажёр к ремонту управляющего элемента не допускается и в любом случае освободившийся от работы мастер немедленно заменяет стажёра.

Пусть случайная величина ω_1 — время, затраченное на ремонт управляющего элемента мастером, ω_2 — время, затраченное на ремонт подчинённого элемента мастером, ω_3 — время, затраченное на ремонт подчинённого элемента стажёром, ω'_2 — "отложенное" время ремонта подчинённого элемента мастером в случае его замены стажёром, ω'_3 — "отложенное" время ремонта подчинённого элемента стажёром в случае его замены мастером.

Соответствующий случайный процесс $\xi(t)$ может находиться в восьми фазовых состояниях. Эти состояния описываются соответствующими функциями, например, состояние $(2, \omega_2, \omega'_3)$ — система функционирует, один из подчинённых элементов неисправен, общее время его ремонта $\omega_2 + \omega'_3$ (ω'_3 — "отложенное" время ремонта стажёром и ω_2 — текущее время ремонта мастером)

$$Q_2(t, x, z) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 2, \omega_2 < x, \omega'_3 < z\}, \quad q_2(t, x, z) := \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x \partial z}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty q_2(t, x, z) dx dz = Q_2(t, \infty, \infty) =: p_2(t) -$$

вероятность нахождения системы в состоянии (2) в момент времени t .

Составлена система интегро — дифференциальных уравнений с граничными условиями относительно этих функций, решение которой получено при некоторых дополнительных ограничениях на интенсивности ремонта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. — Киев: "Выща школа", 1987. — 246 с.

- [2] *Беляев Ю.К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. – Вильнюс. 1962 – с.309-323.
- [3] *Коваленко А.И., Стрыгина Н.З.* Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением // Автоматика и телемеханика – М: Российская АН, 1992 – №1 –с.156-164.
- [4] *Коваленко А.И., Смолич В.П.* Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками // Динамические системы. – 2000. – Вып.16 – с.137-142.

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ¹

В статье доказывается признак равномерной сходимости разложений по собственным функциям одного класса интегральных операторов, являющийся аналогом известного признака Жордана-Дирихле для тригонометрических рядов Фурье.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x, t)f(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

где $A(x, t)$ – n раз непрерывно дифференцируема по x и один раз по t , причем

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} A(x, t)|_{t=x} = \delta_{s, n-1} \quad (s = 0, 1, \dots, n),$$

$\delta_{s, n-1}$ – символ Кронекера.

Свойства рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора (1) имеют много общего с тригонометрическими рядами Фурье. В частности, в [1] для такого оператора установлена равносходимость разложений по с.п.ф. и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Следующую теорему можно рассматривать как аналог известной теоремы Жордана-Дирихле из теории тригонометрических рядов.

Теорема. Пусть α – одно из чисел $0, 1, \dots, n-1$. Тогда для любой $f(x) \in C^\alpha[0, 1]$, у которой $f^{(\alpha)}(x)$ имеет на $[0, 1]$ ограниченную вариацию и которая удовлетворяет условиям $f^{(k)}(1) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, \alpha$), выполняется соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|f(x) - S_r(f, x)\|_{C^\alpha[0, 1]} = 0,$$

где $S_r(f, x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A , соответствующим характеристическим значениям из круга $|\lambda| < r$.

Доказательство. Изложим основные моменты доказательства. Пусть для определенности $n = 4\nu + 1$. Рассмотрим вначале простейший оператор указанного вида

$$A_0 f(x) = \int_0^{1-x} \frac{(1-x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$$

и его резольвенту Фредгольма $R_{0, \lambda} = (E - \lambda A_0)^{-1} A_0$ (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Положим $\lambda = i\rho^n$, где $\rho \in S = \{\rho \mid \arg \rho \in [0, \frac{2\pi}{n}]\}$. Сектор S разобьем на четыре сектора $S_j = \{\rho \mid \arg \rho \in [\frac{\pi}{2n}(j-1), \frac{\pi}{2n}j]\}$ ($j = 1, 2, 3, 4$). Для определенности будем рассматривать $\rho \in S_1$ (остальные сектора рассматриваются аналогично). Обозначим через ω_k ($k = 1, \dots, n$) корни n -й степени из 1, занумерованные так, чтобы в S_1 выполнялись неравенства

$$\operatorname{Re} \rho \omega_1 \geq \operatorname{Re} \rho \omega_2 \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_n \geq 0 \geq \operatorname{Re} \rho \omega_{n+1} \geq \dots \geq \operatorname{Re} \rho \omega_n;$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00003).

$$g_1(x, t, \rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ \varepsilon(x, t) \sum_{k=n_0+1}^n \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) - \varepsilon(t, x) \sum_{k=1}^{n_0} \omega_k \exp \rho \omega_k (x-t) \right\},$$

$$g_2(x, t, \rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \left\{ -\varepsilon(x, t) \sum_{k=1}^{n_0} \omega_k \exp(-\rho \omega_k (x-t)) + \varepsilon(t, x) \sum_{k=n_0+1}^n \omega_k \exp(-\rho \omega_k (x-t)) \right\},$$

где $\varepsilon(x, t) = 1$ при $x \geq t$ и $\varepsilon(x, t) = 0$ при $x < t$;

$\sigma(x, \rho) = \exp \rho \tilde{\omega}_k (x-1)$, если $k = 1, \dots, n$, и $\sigma(x, \rho) = \exp \rho \tilde{\omega}_k x$, если $k = n+1, \dots, 2n$, где через $\tilde{\omega}_k$ обозначены числа $\omega_k, -\omega_k$ ($k = 1, \dots, n$), занумерованные следующим образом

$$Re \rho \tilde{\omega}_1 \geq \dots \geq Re \rho \tilde{\omega}_n \geq 0 \geq Re \rho \tilde{\omega}_{n+1} \geq \dots \geq Re \rho \tilde{\omega}_{2n}.$$

Как показано в [2], из S_1 можно удалить точки $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m, \dots$ вида $\rho_m = a + i\pi m / \tilde{\omega}_n$ вместе с окрестностями достаточно малого радиуса δ так, что в получившейся области $S_{1,\delta}$ при достаточно больших $|\rho|$ $R_{0,\lambda}$ существует и

$$R_{0,\lambda} f(x) = v_1(x, \rho) + v_2(x, \rho), \quad (2)$$

где $(v_1(x, \rho), v_2(x, \rho))^T = \int_0^1 G(x, t, \rho) B F(t) dt$, $G(x, t, \rho) = g(x, t, \rho) + \frac{1}{\rho^{n-1}} H(x, t, \rho)$,

$$g(x, t, \rho) = \text{diag}(g_1(x, t, \rho), g_2(x, t, \rho)), \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = (f(t), f(1-t))^T,$$

$H(x, t, \rho)$ – матрица 2×2 , компоненты которой являются линейными комбинациями всевозможных произведений $\sigma(x, \rho) \sigma(t, \rho)$ с коэффициентами (не зависящими от x и t), являющимися ограниченными функциями ρ .

Введем в рассмотрение операторы

$$T = (E + T_1)^{-1} - E, \quad T_1 f(x) = \int_0^x \frac{\partial^n}{\partial x^n} A(x, t) f(t) dt,$$

$$T'_t f(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) f(t) dt, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad S f(x) = f(1-x).$$

Тогда для резольвенты $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ в $S_{1,\delta}$ при больших $|\rho|$ справедливы формулы (см. [2])

$$R_\lambda = R_{0,\lambda} + R_{0,\lambda} T'_t (E - D^{n-1} S R_{0,\lambda} T'_t)^{-1} D^{n-1} S R_{0,\lambda}; \quad (3)$$

$$R_\lambda - R_{0,\lambda} = R_{0,\lambda} T'_t D^{n-1} S R_{0,\lambda} + K D^{n-1} S R_{0,\lambda} T'_t D^{n-1} S R_{0,\lambda}, \quad (4)$$

где $K f = \int_0^1 K(x, t, \rho) f(t) dt$ и $K(x, t, \rho) = O(\frac{1}{\rho^{n-1}})$.

Аналогичные результаты получаются и при рассмотрении секторов S_2, S_3 и S_4 .

Обозначим $S_\delta = S_{1,\delta} \cup \dots \cup S_{4,\delta}$ и будем в дальнейшем в контурных интегралах брать такие окружности $|\lambda| = r$, прообразы которых в ρ -плоскости лежат в области S_δ .

Рассуждая как и в теореме 2 из [3], можно показать, что если $f(x) \in C^\alpha[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ и $\int_0^1 f^{(\alpha)} < \infty$, то при $r \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\left\| \int_{|\lambda|=r} \left| \frac{d^s}{dx^s} R_{0,\lambda} f(x) \right| |d\lambda| \right\|_{C[0,1]} = |\rho|^{q_s} O(\|f\|_{C^\alpha[0,1]} + o(1)), \quad (5)$$

где $q_s = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq \alpha, \\ s - \alpha, & s > \alpha, \end{cases}, s = 0, 1, \dots, n-1.$

Введем теперь множества $D = \{f(x) \in C^n[0, 1] | f^{(s)}(1) = 0, s = 0, 1, \dots, n-1\}$ и $\overline{D} = \{f(x) \in C^\alpha[0, 1] | f^{(s)}(1) = 0, s = 0, 1, \dots, \alpha\}$. Отметим, что $\overline{D}$ – замыкание D по норме пространства $C^\alpha[0, 1]$. Пусть $f(x)$ – произвольная функция из $\overline{D}$ и $\int_0^1 f^{(\alpha)} < \infty$. Тогда существует последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset D$, сходящаяся к $f(x)$ по норме пространства $C^\alpha[0, 1]$, причем $f_k^{(s)}(0) = f^{(s)}(0)$ и $f_k^{(s)}(1) = f^{(s)}(1)$ для всех $0 \leq s \leq \alpha, k = 1, 2, \dots$.

Учитывая, что $S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f(x) d\lambda$, представим остаточный член в следующем виде

$$f(x) - S_r(f, x) = [f(x) - f_k(x)] + [f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda] + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda (f - f_k) d\lambda. \quad (6)$$

По выбору $f_k(x)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f(x) - f_k(x)\|_{C^\alpha[0,1]} = 0. \quad (7)$$

Теперь возьмем произвольное число μ , не являющееся характеристическим значением оператора A , и положим $g_k(x) = A^{-1}f_k - \mu f_k(x)$. Тогда

$$f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g_k(x)}{\lambda - \mu} d\lambda.$$

Учитывая непрерывность $g_k(x)$ и лемму 6 [4], так же как и в [3], можно показать, используя формулы (2) – (4), что

$$\|D^s R_\lambda g_k(x)\|_{C[0,1]} = o\left(\frac{1}{\rho^{n-1-s}}\right), \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

Из этих оценок следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f_k(x) d\lambda \right\|_{C^\alpha[0,1]} = 0. \quad (8)$$

Последний интеграл в правой части соотношения (6) можно оценить, воспользовавшись формулами (3) – (4) и оценками (5), в результате чего получается соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} R_\lambda (f - f_k) d\lambda \right\|_{C^\alpha[0,1]} = 0. \quad (9)$$

Из формул (6)-(9) следует утверждение теоремы.

Замечание. Условия $f^{(k)}(1) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, \alpha$) необходимы, так как этим условиям удовлетворяют с.п.ф. оператора A .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнев В. В., Хромов А. П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 10. – С. 33-50.
- [2] Конев В. В., Хромов А. П. Абсолютная сходимость разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с переменным пределом интегрирования // Изв. РАН. Сер. Математическая. – 2005. – Т. 69. – № 4. – С. 59-74.
- [3] Корнев В. В., Хромов А. П. О сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов в пространствах дифференцируемых функций // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. – 2004. – Т. 4. – № 1. – С. 19-31.
- [4] Хромов А. П. Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб. – 1981. – Т. 114(156). – № 3. – С. 378-405.

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучается скалярное неоднородное дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа общего вида

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t-\theta) d\sigma_j(\theta) = w(t), \quad t > h,$$

где $\sigma_j(\theta)$ – функции ограниченной вариации. Для решений этого уравнения получена оценка

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{W_2^m(T-h,T)} &\leq C_1 T^{q-1} e^{\varkappa T} \|u(t)\|_{W_2^m(0,h)} \\ &+ C_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T (T-\tau+1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от $u_0(t) = u(t), t \in [0, h]$, и $w(t)$, а значения величин q и $\varkappa$ определяются свойствами характеристического определителя этого уравнения. Ранее эта оценка доказывалась для уравнений менее общего вида. Например, для кусочно постоянных функций $\sigma_j(\theta)$, или для случая, когда $\sigma_m(\theta)$ имеет скачки в обеих точках $\theta = 0$ и $\theta = h$. В настоящей работе эта оценка получена только при условии, что $\sigma_m(\theta)$ имеет скачок в точке $\theta = 0$, которое необходимо для корректной разрешимости начальной задачи.

The paper deals with nonhomogeneous scalar differential-difference equations of the general form

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t-\theta) d\sigma_j(\theta) = w(t), \quad t > h,$$

where $\sigma_j(\theta)$ are the functions of bounded variation. It is proved that the estimate

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{W_2^m(T-h,T)} &\leq C_1 T^{q-1} e^{\varkappa T} \|u(t)\|_{W_2^m(0,h)} \\ &+ C_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T (T-\tau+1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

holds for solutions of this equation. Here constants C_1, C_2 do not depend on functions $u_0(t) = u(t), t \in [0, h]$, and $w(t)$, and the values of q and $\varkappa$ are determined by the properties of the characteristic determinant of this equation. This estimate is known for equations of less general form. Namely, for step functions with finite number of steps, and for the case when the function $\sigma_m(\theta)$ has jumps in both points $\theta = 0$ and $\theta = h$. Here the estimate is obtained under the assumption that $\sigma_m(\theta)$ has jump only at the point $\theta = 0$. This assumption is necessary condition for correct solvability of this equation with given initial condition $u(t) = u_0(t)$ for $t \in [0, h]$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных вопросов, возникающих в теории функционально-дифференциальных уравнений, является вопрос об асимптотическом поведении решений. Среди обширной литературы по этому вопросу отметим монографии [1], [5], [8], [9], [12], в которых могут быть найдены дальнейшие ссылки.

В этой работе мы получаем точные оценки решений неоднородных уравнений нейтрального типа достаточно общего вида. Отметим следующие результаты, наиболее близкие к результатам нашей работы. В [2] изучалась начальная задача

$$\frac{d}{dt} \left(u(t) + \int_0^h u(t-\theta) d\mu(\theta) \right) + \int_0^h u(t-\theta) d\eta(\theta) = 0, \quad t > h \quad (1)$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h], \quad (2)$$

где $\mu(\theta)$, $\eta(\theta)$ – функции ограниченной вариации. Для решений этой задачи при предположении, что $\mu(\theta)$ непрерывна при $\theta = 0$, получена следующая оценка в норме пространства непрерывных функций

$$\|u\|_{C[t, t+h]} \leq de^{(\varkappa+\varepsilon)t} \|u_0\|_{C[0, h]}.$$

В этой оценке число $\varepsilon > 0$ в показателе экспоненты можно взять сколь угодно малым. В этом смысле эта оценка является неточной.

Неточные оценки такого типа давно и хорошо известны (см. указанные выше монографии). Однако точные оценки решений уравнений нейтрального типа различных видов были получены сравнительно недавно. Наиболее общими, на наш взгляд, являются следующие результаты. В [6] изучалось уравнение вида

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m A_{kj} u^{(j)}(t-h_k) = f(t), \quad t > h, \quad (3)$$

где A_{kj} – постоянные матрицы, $\det A_{0m} \neq 0$. Для решений этого уравнения получена оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^m(t-h, t)} &\leq C_1(t+1)^{q-1} e^{\varkappa t} \|u_0\|_{W_2^m(0, h)} \\ &+ C_2 \sqrt{t} \left(\int_0^t (t-\tau+1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(t-\tau)} |f(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где постоянные C_1, C_2 не зависят от функций $u_0(t)$, $f(t)$, а q и $\varkappa$ – некоторые действительные числа. Здесь уже нельзя уменьшить число $\varkappa$ и заменить его на $\varkappa - \varepsilon$, т.е. эта оценка является точной.

В уравнении (3) участвует лишь конечное число запаздываний по времени, задаваемых числами h_k . В то же время интерес вызывают такие уравнения, запаздывания в которых заданы в более общем виде. Например, в уравнении (1) запаздывания и коэффициенты задаются функциями ограниченной вариации $\mu(\theta)$ и $\eta(\theta)$. В случае, когда эти функции кусочно-постоянные с конечным числом скачков, мы получаем уравнение с конечным числом запаздываний. Точная оценка решений нейтральных уравнений вида (1), запаздывания и коэффициенты в которых задаются функциями ограниченной вариации, получена в [3], где изучается векторное уравнение вида

$$\frac{d}{dt} \int_0^h u(t-\theta) d\mu(\theta) + \int_0^h u(t-\theta) d\eta(\theta) = f(t),$$

элементы матриц $\mu(\theta)$ лежат в $BV[0, h]$, а элементы матриц $\eta(\theta)$ лежат в $L_2(0, h)$. Однако оценка решений получена при более жестких ограничениях на коэффициенты. А именно, предполагается, что функция $\mu(\theta)$ имеет скачок не только при $\theta = 0$, но еще и при $\theta = h$.

Однородные скалярные нейтральные уравнения общего вида изучаются в [7]. Коэффициенты в этой работе задаются функциями ограниченной вариации по аналогии с [2] и [3], но на них наложены минимальные ограничения, гарантирующие лишь корректную разрешимость начальной задачи. В настоящей работе мы применяем

методы, развитые в [7], к неоднородным уравнениям. Для решений соответствующей начальной задачи получена точная оценка в пространстве W_2^m .

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассматривается следующая начальная задача для скалярного неоднородного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t-\theta) d\sigma_j(\theta) = w(t), \quad t > h \quad (5)$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h], \quad (6)$$

где функции $\sigma_j(\theta) \in BV[0, h]$. Целая функция

$$\Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j \int_0^h e^{-\lambda\theta} d\sigma_j(\theta) \quad (7)$$

называется характеристическим определителем уравнения (5).

В [7] с помощью методов работ [10] и [11] была доказана следующая теорема, которая понадобится нам для точной формулировки основного результата работы.

Теорема 1. Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда все нули $\Delta(\lambda)$ лежат в некоторой левой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda \leq C\}$, и поэтому существует число $\varkappa = \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \Delta(\lambda) = 0\} < \infty$. Кроме того, число нулей $n_\Delta(P(a, b, h))$ определителя $\Delta(\lambda)$, лежащих в прямоугольнике $P(a, b, h) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in (a, \varkappa), \operatorname{Im} \lambda \in (b, b+h)\}$, не зависит от $b \in \mathbb{R}$, и существует предел

$$q = \lim_{a \rightarrow \varkappa} \lim_{h \rightarrow 0} \max_{b \in \mathbb{R}} n_\Delta(P(a, b, h)). \quad (8)$$

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 2. Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда для решения $u(t)$ задачи (5), (6) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^m(T-h, T)} &\leq C_1 T^{q-1} e^{\varkappa T} \|u_0\|_{W_2^m(0, h)} \\ &\quad + C_2 \sqrt{T} \left(\int_0^T (T-\tau+1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1, а постоянные C_1, C_2 не зависят от функций $u_0(t), w(t)$.

Оценка (9) может быть уточнена, если наложить дополнительные ограничения на функцию $w(t)$.

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 2, и функция $w(t)$ имеет компактный носитель. Тогда для решения $u(t)$ задачи (5), (6) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^m(T-h, T)} &\leq C_1 T^{q-1} e^{\varkappa T} \|u_0\|_{W_2^m(0, h)} \\ &\quad + C_2 \left(\int_0^T (T-\tau+1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1, постоянные C_1, C_2 не зависят от функций $u_0(t), w(t)$, но постоянная C_2 зависит от размера носителя функции $w(t)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Вместе с уравнением (5) и начальным условием (6) мы будем рассматривать однородное уравнение

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t-\theta) d\sigma_j(\theta) = 0, \quad t > h, \quad (11)$$

и однородное начальное условие.

$$u(t) = 0, \quad t \in [0, h]. \quad (12)$$

Т.к. задача (5), (6) линейна, то ее решение $u(t)$ может быть записано в виде

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

где функция $u_1(t)$ есть решение задачи (11), (6), а функция $u_2(t)$ есть решение задачи (5), (12). Оценка функции $u_1(t)$ была получена в [7] и дает первое слагаемое в оценке (9). Поэтому нам достаточно получить оценку функции $u_2(t)$, которая даст второе слагаемое в оценке (9).

Применяя к уравнению (5) преобразование Лапласа (мы предполагаем, что функция $w(t)$ имеет не более, чем экспоненциальный рост), решение $u_2(t)$ задачи (5), (12) может быть записано в виде

$$u_2(t) = \int_{b+i\mathbb{R}} e^{t\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^\infty w(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau d\lambda, \quad (13)$$

где $b \in \mathbb{R}$ – достаточно большое число, а функция $w(t)$ доопределена нулем при $t \in [0, h]$. Разлагая здесь интеграл по τ в сумму интегралов, представим функцию $u_2(t)$ в виде

$$u_2(t) = \sum_{j=1}^\infty u_{2j}(t), \quad (14)$$

$$u_{2j}(t) = \int_{b+i\mathbb{R}} e^{t\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \int_{jh}^{jh+h} w(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau d\lambda \quad (15)$$

и оценим функции $u_{2j}(t)$.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для функций $u_{2j}(t)$, заданных (15), справедлива оценка

$$\|u_{2j}\|_{W_2^m(T-h, T)} \leq C(T-jh+1)^{q-1} e^{\varkappa(T-jh)} \|w\|_{L_2(jh, jh+h)}, \quad (16)$$

где постоянная C не зависит от функции $w(t)$, а числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1.

Доказательство. Эта оценка является непосредственным следствием основных результатов работы [7]. Действительно, представление (15) может быть переписано в виде

$$u_{2j}(t) = \int_{b+i\mathbb{R}} e^{\lambda(t-jh)} \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^h w(jh+\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau d\lambda. \quad (17)$$

В [7] оценивалась функция вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^m \int_{b+i\mathbb{R}} e^{t\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^h \int_0^{h-\theta} u_0^{(j)}(\tau) e^{-\lambda(\tau+\theta)} d\tau d\sigma_j(\theta) d\lambda,$$

в пространстве $W_2^m(T-h, T)$. Причем, фактически, была показана оценка

$$\left\| \int_{b+i\mathbb{R}} e^{t\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^h \int_0^{h-\theta} f(\tau) e^{-\lambda(\tau+\theta)} d\tau d\sigma(\theta) d\lambda \right\|_{W_2^m(T-h, T)} \leq CT^{q-1} e^{\varkappa T} \|f(\tau)\|_{L_2(0, h)},$$

где постоянная C не зависит от функции $f(\tau)$, а функция $\sigma(\theta)$ есть произвольная функция ограниченной вариации. Взяв здесь кусочно-постоянную функцию $\sigma(\theta)$ с единственным скачком в $\theta = 0$, можно убедиться, что выражение (17) для функций $u_{2j}(t)$ имеет тот же вид, что и в этой оценке. Лемма доказана.

Используя оценку (16) функций $u_{2j}(t)$, оценим, теперь, функцию $u_2(t)$ с помощью метода [4, стр. 445].

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения $u_2(t)$ задачи (5), (12) справедлива оценка

$$\|u_2(t)\|_{W_2^m(T-h, T)}^2 \leq CT \int_0^T (T - \tau + 1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)|^2 d\tau.$$

где постоянная C не зависит от функции $w(t)$, а числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1.

Доказательство. Сравнивая (13) и (15), можно заметить, что функция $u_{2j}(t)$ есть решение задачи (5), (12), где в (5) вместо функции $w(t)$ надо подставить функцию $w(t)\chi_{(jh, jh+h)}(t)$, где $\chi_{(a, b)}(t)$ – характеристическая функция интервала (a, b) . Поэтому $u_{2j}(t) = 0$ при $t < jh$. Не ограничивая общности, можно считать, что $T = (n+1)h$. Тогда

$$u_2(t) = \sum_{j=1}^n u_{2j}(t), \quad t < T. \quad (18)$$

Оценим эту сумму. Имеем

$$\|u_2\|_{W_2^m(T-h, T)}^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \|u_{2j}\|_{W_2^m(T-h, T)} \right)^2 \leq n \sum_{j=1}^n \|u_{2j}\|_{W_2^m(T-h, T)}^2. \quad (19)$$

Применяя лемму 1, продолжаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{W_2^m(T-h, T)}^2 &\leq Cn \sum_{j=1}^n \int_{jh}^{jh+h} (T - \tau + 1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)| d\tau \\ &\leq CT \int_0^T (T - \tau + 1)^{2(q-1)} e^{2\varkappa(T-\tau)} |w(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

причем постоянная C не зависит от функции $w(t)$. Последняя оценка доказывает лемму.

Лемма 2 завершает доказательство теоремы 2. Докажем, теперь, следствие 1.

Доказательство следствия 1. Если функция $w(t)$ имеет компактный носитель, то число членов суммы в (18) ограничено сверху постоянной, не зависящей от T , но зависящей от размера носителя функции $w(t)$. Поэтому в доказательстве леммы 2 в оценке (19) и последующих оценках можно убрать множитель n , а затем и множитель T , внося их в постоянную C . Следствие доказано.

Автор искренне благодарит проф. Шкаликова А.А. за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Diekmann, S.A. van Gils, S.M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther "Delay Equations. Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis"// Springer, 1995
- [2] D. Henry "Linear Autonomous Neutral Functional Differential Equations"// J. of Diff. Eq., 1974, v.5, N1, 106-128
- [3] Vlasov V.V., Medvedev D.A. "On asymptotic behavior and estimates of solutions to neutral equations"// Functional differential equations, 2006, v.13, N2, 207-223
- [4] Vlasov V.V., Wu J. "Sharp estimates of solutions to neutral equations in sobolev spaces"// Func. Diff. Eq., 2005, v.12, N3-4, 437-461
- [5] Беллман Р., Кук К. "Дифференциально-разностные уравнения"// М. Мир, 1967
- [6] Власов В.В., Иванов С.А. "О точных оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа"// ДАН, 2006, т.406, N5
- [7] Лесных А.А. "Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа"// Мат. заметки, 2007, принято к печати
- [8] Мышкис А.Д. "Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом"// М. Наука, 1972
- [9] Хейл Дж. "Теория функционально-дифференциальных уравнений"// М. Мир, 1984
- [10] Шкаликов А.А. "Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях"// Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1983, т.9, 190-229
- [11] Шкаликов А.А. "Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций"// Мат. сб., 1984, т.123, N3, 317-347
- [12] Эльсгольд Э.Л. "Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом"// М. Наука, 1964

Мельникова И. В., Вдовин М. В.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ КОШИ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ ¹

Построены регуляризующие операторы задач Коши в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, $C_0(\mathbb{R})$ для дифференциальных систем корректных по Петровскому и условно-корректных. Получена формула оценки погрешности для регуляризующих операторов на классе решений дифференциальных задач Коши в указанных пространствах. Основные результаты получены с помощью свойств свертки в указанных пространствах и теории обобщенных функций Гельфанда–Шилова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена задаче Коши

$$\mathbf{u}'(t) = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u}(t), \quad t \in [0, T], \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{f}, \quad P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(p_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)_1^m, \quad (1)$$

в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, связанной с системами дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j(t, x) = \sum_{k=1}^m p_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Здесь X_p^m — m -мерное пространство векторов $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$, компоненты которых принадлежат соответствующему пространству

$$X_p = \begin{cases} L_p(\mathbb{R}), & \text{если } p \in [1, \infty), \\ C_0(\mathbb{R}), & \text{если } p = \infty, \end{cases} \quad \text{с нормой} \quad \|\mathbf{f}\|_{X_p^m} = \left(\sum_{j=1}^m \|f_j\|_{X_p}^2\right)^{1/2};$$

$p_{jk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — полиномы от оператора $i\frac{\partial}{\partial x}$ максимального порядка r с постоянными комплексными коэффициентами.

Согласно классификации систем (2) Гельфанда–Шилова (см. [2]) выделим два класса:

1. Класс систем *корректных по Петровскому*, для которых при $t \geq 0$ на вещественной прямой выполняется неравенство

$$\left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi)|^2\right)^{1/2} \leq (C_1 + C_2 t^{m-1})e^{a_1 t}(1 + |\xi|)^{r(m-1)}, \quad a_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Класс систем *условно-корректных*, для которых при $t \geq 0$ на вещественной прямой выполняется неравенство

$$\left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi)|^2\right)^{1/2} \leq (C_1 + C_2 t^{m-1})e^{a_2 t}(1 + |\xi|)^{r(m-1)}e^{bt|\xi|^h}, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad b > 0, \quad 0 < h < 1. \quad (3)$$

Здесь $\tilde{g}_{jk}(t, \zeta)$ ($j, k = 1, \dots, m$), $\zeta = \xi + i\eta$, — элементы матрицы

$$e^{tP(\zeta)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} P^l(\zeta).$$

В работе [3] для задач (1) в пространстве X_2^m , связанных с выделенными классами систем, с помощью техники R -полугрупп и преобразования Фурье функций,

¹Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 06-01-00148а.

суммируемых с квадратом, построены регуляризующие операторы, которые можно представить в виде

$$\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}_\delta = \mathcal{F}^{-1}[e^{tP(\cdot)}\tilde{K}_\alpha\tilde{\mathbf{f}}_\delta], \quad \alpha = \alpha(\delta) > 0,$$

где $\tilde{K}_\alpha(\xi) = \begin{cases} (1 + \alpha\xi^2)^{-r(m-1)/2}, & \text{в случае систем корректных по Петровскому,} \\ e^{-\alpha\xi^2}, & \text{в случае условно-корректных систем.} \end{cases}$

В настоящей работе с помощью техники свертки в пространствах X_p , $p \in [1, \infty]$, и преобразования Фурье исследован оператор $\mathbf{R}_\alpha(t)$, определенный при некотором элементе $\tilde{K}_\alpha$ следующим образом:

$$\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f} = (u_1^{(\alpha)}(t), \dots, u_m^{(\alpha)}(t)), \quad \text{где} \quad u_j^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=1}^m s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * f_k \quad (j = 1, \dots, m),$$

$$s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{g}_{jk}(t, \cdot)\tilde{K}_\alpha] \quad (j, k = 1, \dots, m).$$

В результате получены условия на $\tilde{K}_\alpha$ (теорема 5), зависящие от выделенных классов систем и обеспечивающие для оператора $\mathbf{R}_\alpha(t)$ выполнение основных свойств регуляризующего оператора задачи (1) в пространстве X_p^m при любом $p \in [1, \infty]$:

1) при каждом $t \in (0, T]$ $\{\mathbf{R}_\alpha(t)\}_{\alpha>0}$ — семейство ограниченных операторов, определенных для всех $\mathbf{f}_\delta$ таких, что $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \leq \delta$;

2) существует зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ такая, что

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{R}_{\alpha(\delta)}(t)\mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{u}(t)$ — решение задачи (1) для начального вектора $\mathbf{f}$.

2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ ОПЕРАТОРА $\mathbf{R}_\alpha(t)$

В этом разделе мы получим условия на $\tilde{K}_\alpha$, при которых оператор $\mathbf{R}_\alpha(t)$ равномерно по $t \in [0, T]$ ограничен в пространствах X_p^m , $p \in [1, \infty]$.

Известно (§18.3 [4]), что если $s \in X_1$, $f \in X_p$, $p \in [1, \infty]$, то $s * f \in X_p$ и $\|s * f\|_{X_p} \leq \|s\|_{X_1}\|f\|_{X_p}$. Отсюда, если $\{s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\}_{j,k=1}^m \subset X_1$, то при любом $p \in [1, \infty]$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}\|_{X_p^m} &= \left(\sum_{j=1}^m \left\| \sum_{k=1}^m s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * f_k \right\|_{X_p}^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \|s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\|_{X_1} \|f_k\|_{X_p} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \|s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\|_{X_1}^2 \right)^{1/2} \|f_k\|_{X_p} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j,k=1}^m \|s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\|_{X_1}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{f}\|_{X_p^m}. \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть функция $\tilde{s} \in X_1$ локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$, такая, что $\tilde{s}(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и ее производная принадлежит пространству X_2 . Тогда обратное преобразование Фурье функции $\tilde{s}$ — функция s — принадлежит пространству X_1 и для любого $\rho > 0$

$$\|s\|_{X_1} \leq \frac{\rho}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}(\xi)| d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$s_M(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \tilde{s}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi, \quad M > 0,$$

которые в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ при $M \rightarrow \infty$ сходятся к

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \tilde{s}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi.$$

Для функций s_M при произвольных M , $\rho > 0$ и $N > \rho$ выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \int_{-N}^N |s_M(x)| dx &= \int_{-N}^N \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \tilde{s}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right| dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq \rho} \left| \int_{-M}^M \tilde{s}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right| dx + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\rho < |x| \leq N} \left| \frac{\tilde{s}(M)e^{-ixM} - \tilde{s}(-M)e^{ixM}}{-ix} + \frac{1}{ix} \int_{-M}^M \tilde{s}'(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right| dx \leq \\ &\leq \frac{\rho}{\pi} \int_{-M}^M |\tilde{s}(\xi)| d\xi + \frac{1}{\pi} (|\tilde{s}(M)| + |\tilde{s}(-M)|) \ln \frac{N}{\rho} + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\rho < |x| \leq N} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\int_{-N}^N \left| \int_{-M}^M \tilde{s}'(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\rho}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}(\xi)| d\xi + \frac{1}{\pi} (|\tilde{s}(M)| + |\tilde{s}(-M)|) \ln \frac{N}{\rho} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \left(\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-M}^M \tilde{s}'(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Откуда следует, что при любых $\rho > 0$, $N > \rho$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-N}^N |s_M(x)| dx \leq \frac{\rho}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}(\xi)| d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

значит, согласно теореме Фату функция s суммируема на отрезке $[-N, N]$ и

$$\int_{-N}^N |s(x)| dx \leq \frac{\rho}{\pi} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}(\xi)| d\xi + \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{s}'(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

при любых $\rho > 0$, $N > \rho$. Отсюда, в силу произвольности N , следует, что функция s суммируема на всей вещественной прямой и для любого $\rho > 0$ выполняется (4).

Таким образом, если произведения $\tilde{g}_{jk}(t, \cdot) \tilde{K}_\alpha$ ($j, k = 1, \dots, m$) удовлетворяют условиям леммы 1, то $s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)$ ($j, k = 1, \dots, m$) принадлежат пространству X_1 , и при любом $\rho > 0$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j,k=1}^m \|s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\|_{X_1}^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{j,k=1}^m \left(\frac{\rho}{\pi} A_{jk} + \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} B_{jk}^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\rho}{\pi} \left(\sum_{j,k=1}^m A_{jk}^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} \left(\sum_{j,k=1}^m B_{jk} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{где} \quad A_{jk} = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_{jk}(t, \xi) \tilde{K}_\alpha(\xi)| d\xi, \quad B_{jk} = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{g}_{jk}(t, \xi) \tilde{K}_\alpha(\xi)) \right|^2 d\xi;$$

$$\begin{aligned}
\text{при этом } \left(\sum_{j,k=1}^m A_{jk}^2 \right)^{1/2} &= \left(\sum_{j,k=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} |\tilde{g}_{jk}(t, \xi) \tilde{K}_{\alpha}(\xi)| d\xi \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi) \tilde{K}_{\alpha}(\xi)|^2 \right)^{1/2} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi)|^2 \right)^{1/2} |\tilde{K}_{\alpha}(\xi)| d\xi, \\
&\sum_{j,k=1}^m B_{jk} = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}_{jk}(t, \xi) \tilde{K}_{\alpha}(\xi) + \tilde{g}_{jk}(t, \xi) \tilde{K}'_{\alpha}(\xi) \right|^2 d\xi \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}_{jk}(t, \xi) \right|^2 \right)^{1/2} |\tilde{K}_{\alpha}(\xi)| + \left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi)|^2 \right)^{1/2} |\tilde{K}'_{\alpha}(\xi)| \right)^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Отсюда, если положить $A_{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi)|^2 \right)^{1/2} |\tilde{K}_{\alpha}(\xi)| d\xi$,

$$B_{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\left(\sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}_{jk}(t, \xi) \right|^2 \right)^{1/2} |\tilde{K}_{\alpha}(\xi)| + \left(\sum_{j,k=1}^m |\tilde{g}_{jk}(t, \xi)|^2 \right)^{1/2} |\tilde{K}'_{\alpha}(\xi)| \right)^2 d\xi, \quad (6)$$

то неравенство (5) примет вид $\left(\sum_{j,k=1}^m \|s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\|_{X_1}^2 \right)^{1/2} \leq A_{\alpha} \rho + \sqrt{\frac{B_{\alpha}}{\rho}}$. Наконец,

переходя к минимуму правой части (неравенство (5) установлено при произвольном $\rho > 0$), получаем

$$\left(\sum_{j,k=1}^m \|s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot)\|_{X_1}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} \right) (A_{\alpha} B_{\alpha})^{1/3}.$$

Заметим, что $\tilde{g}_{jk}(t, \zeta)$ ($j, k = 1, \dots, m$) — целые функции от ζ , следовательно, производные $\frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}_{jk}(t, \cdot)$ ($j, k = 1, \dots, m$) существуют, более того, согласно [1] при $t \in [0, T]$ на вещественной прямой выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}_{jk}(t, \xi) \right|^2 \right)^{1/2} &\leq C_3(T) (1 + |\xi|)^{rm-1}, & \text{в случае систем} \\
&& \text{корректных по Петровскому,} \\
\left(\sum_{j,k=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{g}_{jk}(t, \xi) \right|^2 \right)^{1/2} &\leq C_4(T, \varepsilon) (1 + |\xi|)^{rm-h-1} e^{(b+\varepsilon)T|\xi|^h}, & \text{в случае условно-} \\
&& \text{корректных систем;}
\end{aligned}$$

здесь b, h те же, что в неравенстве (3), ε произвольное положительное.

На основании изложенных результатов имеет место.

Теорема 1. Следующие условия на функцию $\tilde{K}_{\alpha}$:

1) непрерывная дифференцируемость на вещественной прямой;

2) убывание на бесконечности: в случае систем корректных по Петровскому

$$\tilde{K}_{\alpha}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{rm+1}}\right), \quad \tilde{K}'_{\alpha}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{rm-r+1}}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

в случае условно-корректных систем

$$\tilde{K}_{\alpha}(\xi) = O\left(\frac{1}{e^{(b+\varepsilon)T|\xi|^h} |\xi|^{rm}}\right), \quad \tilde{K}'_{\alpha}(\xi) = O\left(\frac{1}{e^{bT|\xi|^h} |\xi|^{rm-r+1}}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty;$$

обеспечивают равномерную по $t \in [0, T]$ ограниченность оператора $\mathbf{R}_{\alpha}(t)$ в пространствах X_p^m , $p \in [1, \infty]$; при этом справедлива оценка

$$\|\mathbf{R}_{\alpha}(t)\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4} \right) (A_{\alpha} B_{\alpha})^{1/3} \quad (A_{\alpha}, B_{\alpha} \text{ задаются формулами (6)}). \quad (7)$$

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ (1) ОПЕРАТОРОМ $\mathbf{R}_\alpha(t)$

В этом разделе мы определим семейство $\{\tilde{K}_\alpha\}_{\alpha>0}$, для элементов которого выполняются условия теоремы 1, и установим зависимость $\alpha = \alpha(\delta)$ на классе обобщенных решений задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, такую, что из условий $\delta \rightarrow 0$, $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \leq \delta$ следует:

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{R}_{\alpha(\delta)}(t)\mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \rightarrow 0,$$

где $\mathbf{u}(t)$ — обобщенное решение задачи (1) в пространстве X_p^m для начального вектора $\mathbf{f}$.

Определение 1. Вектор-функцию $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, $t \in [0, T]$, принимающую значения из пространства X_p^m , $p \in [1, \infty]$, будем называть обобщенным решением задачи (1) в пространстве X_p^m , если:

1) функция $\mathbf{u}(t)$ ограничена на отрезке $[0, T]$;

2) для любого элемента φ из $\mathcal{D}$ — пространства бесконечно дифференцируемых на вещественной прямой финитных функций,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_j(t), \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^m \left\langle u_k(t), \bar{p}_{jk} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \right\rangle, \quad t \in (0, T], \\ \lim_{t \rightarrow +0} \langle u_j(t), \varphi \rangle &= \langle f_j, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (j = 1, \dots, m), \quad (8)$$

где $\langle u_j(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{u_j(t, x)} \varphi(x) dx$, $\bar{p}_{jk}$ — полином с коэффициентами комплексно сопряженными к коэффициентам полинома p_{jk} .

Пусть $\tilde{K}_\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а $\mathbf{u}(t)$ — обобщенное решение задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, для начального вектора $\mathbf{f}$. Тогда в силу леммы 1 элемент $K_\alpha = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{K}_\alpha]$ принадлежит пространству X_1 и, следовательно, вектор-функция $K_\alpha * \mathbf{u}(t)$ с компонентами $K_\alpha * u_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) в силу свойств свертки принимает значения из пространства X_p^m . Докажем равенство $K_\alpha * \mathbf{u}(t) = \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}$, для чего поступим следующим образом: сначала покажем, что вектор-функции $\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}$, $K_\alpha * \mathbf{u}(t)$ являются обобщенными решениями задачи (1) в пространстве X_p^m для одного и того же начального вектора с компонентами $K_\alpha * f_j$ ($j = 1, \dots, m$), а затем применим теорему о единственности обобщенного решения задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$.

Лемма 2. Пусть функции $w_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$), принимающие значения из пространства X_p , $p \in [1, \infty]$, ограничены на отрезке $[0, T]$ и обладают свойством: при любых $\varphi \in \mathcal{D}$, $t \in [0, T]$, $\Delta t \neq 0$ ($t + \Delta t \in [0, T]$), почти для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$(w_j(t + \Delta t) * \varphi - w_j(t) * \varphi)(x) = \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta t} (w_k(t + \tau) * \varphi_{jk})(x) \quad (j = 1, \dots, n),$$

где $\varphi_{jk} = \varphi_{jk}(\varphi)$ ($j, k = 1, \dots, m$) — элементы пространства $\mathcal{D}$. Тогда при любом $\varphi \in \mathcal{D}$ функции $w_j(t) * \varphi$ ($j = 1, \dots, n$) дифференцируемы на отрезке $[0, T]$ в пространстве X_p и выполняются равенства

$$\frac{d}{dt} (w_j(t) * \varphi) = \sum_{k=1}^n w_k(t) * \varphi_{jk} \quad (j = 1, \dots, n).$$

В частности, если функции $w_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) принимают значения из пространства X_1 , то при любом $\varphi \in \mathcal{D}$ функции $w_j(t) * \varphi$ ($j = 1, \dots, n$) дифференцируемы на отрезке $[0, T]$ во всех пространствах X_p , $p \in [1, \infty]$.

Доказательство. В рамках условий данной леммы, в силу обобщенного неравенства Минковского и неравенства для свертки, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{w_j(t + \Delta t) * \varphi - w_j(t) * \varphi}{\Delta t} - \sum_{k=1}^n w_k(t) * \varphi_{jk} \right\|_{X_p} = \\
& = \frac{1}{|\Delta t|} \left\| \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta t} (w_k(t + \tau) * \varphi_{jk})(\cdot) d\tau - \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta t} (w_k(t) * \varphi_{jk})(\cdot) d\tau \right\|_{X_p} = \\
& = \frac{1}{|\Delta t|} \left\| \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta t} \left(\left(\sum_{l=1}^n \int_0^{\tau} (w_l(t + \sigma) * \widehat{\varphi}_{kl})(\cdot) d\sigma \right) * \varphi_{jk} \right)(\cdot) d\tau \right\|_{X_p} \leq \\
& \leq \frac{1}{|\Delta t|} \sum_{k=1}^n \int_0^{\Delta t} \left\| \sum_{l=1}^n \int_0^{\tau} (w_l(t + \sigma) * \widehat{\varphi}_{kl})(\cdot) d\sigma \right\|_{X_p} \|\varphi_{jk}\|_{X_1} d\tau \leq \\
& \leq \frac{1}{|\Delta t|} \sum_{k=1}^n \|\varphi_{jk}\|_{X_1} \int_0^{\Delta t} \sum_{l=1}^n \int_0^{\tau} \|w_l(t + \sigma)\|_{X_p} \|\widehat{\varphi}_{kl}\|_{X_1} d\sigma d\tau \leq \\
& \leq M \sum_{k,l=1}^n \|\varphi_{jk}\|_{X_1} \|\widehat{\varphi}_{kl}\|_{X_1} |\Delta t|.
\end{aligned}$$

Если же функции $w_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) принимают значения из пространства X_1 , то оценка примет вид

$$\left\| \frac{w_j(t + \Delta t) * \varphi - w_j(t) * \varphi}{\Delta t} - \sum_{k=1}^n w_k(t) * \varphi_{jk} \right\|_{X_p} \leq M \sum_{k,l=1}^n \|\varphi_{jk}\|_{X_p} \|\widehat{\varphi}_{kl}\|_{X_p} |\Delta t|.$$

Из полученных оценок следует утверждение леммы.

Теорема 2. Для любого вектора $\mathbf{f} \in X_p^m$, $p \in [1, \infty]$, вектор-функция $\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}$ является обобщенным решением задачи (1) для начального вектора с компонентами $K_\alpha * f_j$ ($j = 1, \dots, m$).

Доказательство. В силу равномерной по $t \in [0, T]$ ограниченности оператора $\mathbf{R}_\alpha(t)$ в пространствах X_p^m , $p \in [1, \infty]$, первое условие в определении обобщенного решения выполняется. Покажем, что выполняется и второе условие.

При любом $\varphi \in \mathcal{D}$ согласно теореме Фубини имеем:

$$\langle u_j^{(\alpha)}(t), \varphi \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * f_k, \varphi \right\rangle = \sum_{k=1}^m \langle s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * \varphi^*, f_k^* \rangle,$$

где $\varphi^*(x) = \overline{\varphi}(-x)$, $f_k^*(x) = \overline{f_k}(-x)$. Кроме того, при любых $k \in \{1, \dots, m\}$, $t \in [0, T]$, $\Delta t \neq 0$ ($t + \Delta t \in [0, T]$), в силу свойств преобразования Фурье и согласно теореме Фубини, для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
& (s_{jk}^{(\alpha)}(t + \Delta t, \cdot) * \varphi^* - s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * \varphi^*)(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{g}_{jk}(t + \tau, \cdot) d\tau \widetilde{K}_\alpha \widetilde{\varphi^*} \right](x) = \\
& = \mathcal{F}^{-1} \left[\int_0^{\Delta t} \sum_{l=1}^m p_{jl} \widetilde{g}_{lk}(t + \tau, \cdot) d\tau \widetilde{K}_\alpha \widetilde{\varphi^*} \right](x) = \\
& = \sum_{l=1}^m \int_0^{\Delta t} \mathcal{F}^{-1} [\widetilde{g}_{lk}(t + \tau, \cdot) \widetilde{K}_\alpha p_{jl} \widetilde{\varphi^*}](x) d\tau = \\
& = \sum_{l=1}^m \int_0^{\Delta t} \left(s_{lk}^{(\alpha)}(t + \tau, \cdot) * p_{jl} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi^* \right)(x) d\tau \quad (j = 1, \dots, m),
\end{aligned}$$

позволяющие применить лемму 2, в силу которой для всех $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u_j^{(\alpha)}(t), \varphi \rangle &= \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{d}{dt} (s_{jk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * \varphi^*), f_k^* \right\rangle = \sum_{k=1}^m \left\langle \sum_{l=1}^m s_{lk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * p_{jl} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi^*, f_k^* \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^m \left\langle \sum_{k=1}^m s_{lk}^{(\alpha)}(t, \cdot) * f_k, \bar{p}_{jl} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \right\rangle = \sum_{l=1}^m \left\langle u_l^{(\alpha)}(t), \bar{p}_{jl} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

При этом устанавливается и непрерывность в нуле:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \langle u_j^{(\alpha)}(t), \varphi \rangle = \langle u_j^{(\alpha)}(0), \varphi \rangle = \langle K_\alpha * f_j, \varphi \rangle. \quad \square$$

Теорема 3. Если вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ является обобщенным решением задачи (1) для начального вектора $\mathbf{f} \in X_p^m$, $p \in [1, \infty]$, то вектор-функция $K_\alpha * \mathbf{u}(t)$ с компонентами $K_\alpha * u_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) является обобщенным решением задачи (1) для начального вектора с компонентами $K_\alpha * f_j$ ($j = 1, \dots, m$).

Доказательство. В силу неравенства для свертки имеем $\|K_\alpha * \mathbf{u}(t)\|_{X_p^m} \leq \|K_\alpha\|_{X_1} \|\mathbf{u}(t)\|_{X_p^m}$. Следовательно, в силу ограниченности функции $\mathbf{u}(t)$ на отрезке $[0, T]$, имеет место ограниченность функции $K_\alpha * \mathbf{u}(t)$.

Далее, при любом $\varphi \in \mathcal{D}$ $\langle K_\alpha * u_j(t), \varphi \rangle = \langle u_j(t) * \varphi^*, K_\alpha^* \rangle$; при этом при любых $t \in (0, T]$, $\Delta t \neq 0$ ($t + \Delta t \in (0, T]$), и всех $x \in \mathbb{R}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} (u_j(t + \Delta t) * \varphi^* - u_j(t) * \varphi^*)(x) &= \int_0^{\Delta t} \frac{d}{d\tau} (u_j(t + \tau) * \varphi^*)(x) d\tau = \\ &= \int_0^{\Delta t} \frac{d}{d\tau} \langle u_j(t + \tau), \varphi_x^* \rangle d\tau = \int_0^{\Delta t} \sum_{k=1}^m \left\langle \frac{d}{d\tau} u_k(t + \tau), p_{jk} \left(i \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi_x^* \right\rangle d\tau = \\ &= \sum_{k=1}^m \int_0^{\Delta t} \left(u_k(t + \tau) * p_{jk} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi^* \right)(x) d\tau \quad (j = 1, \dots, m), \end{aligned}$$

где $\varphi_x^*(y) = \varphi^*(x - y)$ при $x, y \in \mathbb{R}$. Следовательно, мы можем применить лемму 2, согласно которой для всех $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle K_\alpha * u_j(t), \varphi \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u_j(t) * \varphi^*, K_\alpha^* \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} (u_j(t) * \varphi^*), K_\alpha^* \right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^m \left\langle u_k(t) * p_{jk} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi^*, K_\alpha^* \right\rangle = \sum_{k=1}^m \left\langle K_\alpha * u_k(t), \bar{p}_{jk} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Наконец, рассмотрим модуль разности

$$|\langle K_\alpha * u_j(t), \varphi \rangle - \langle K_\alpha * f_j, \varphi \rangle| = |\langle u_j(t), K_\alpha^* * \varphi \rangle - \langle f_j, K_\alpha^* * \varphi \rangle|,$$

для которого, поскольку $K_\alpha^* * \varphi \in \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} X_p$, имеет место оценка

$$\begin{aligned} &|\langle u_j(t), K_\alpha^* * \varphi \rangle - \langle f_j, K_\alpha^* * \varphi \rangle| \leq \\ &\leq |\langle u_j(t), \varphi_n \rangle - \langle f_j, \varphi_n \rangle| + |\langle u_j(t), K_\alpha^* * \varphi - \varphi_n \rangle| + |\langle f_j, \varphi_n - K_\alpha^* * \varphi \rangle| \leq \\ &\leq |\langle u_j(t), \varphi_n \rangle - \langle f_j, \varphi_n \rangle| + 2M \|K_\alpha^* * \varphi - \varphi_n\|_{X_{p'}}, \end{aligned}$$

где $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}$ — последовательность, сходящаяся к $K_\alpha^* * \varphi$ по норме пространства $X_{p'}$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Отсюда следует, что $\lim_{t \rightarrow +0} \langle K_\alpha * u_j(t), \varphi \rangle = \langle K_\alpha * f_j, \varphi \rangle$. $\square$

Теорема 4. Обобщенное решение задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, единственно.

Доказательство. Согласно [2] (гл. II) существуют пространства $\mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B} \subset \mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B'}$ ($B < B'$) такие, что дифференциальный оператор бесконечного порядка

$$e^{tQ(i\frac{\partial}{\partial x})} : \mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B} \rightarrow \mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B'}, \quad \text{где } Q(i\frac{\partial}{\partial x}) = (q_{jk}(i\frac{\partial}{\partial x}))_1^m, \quad q_{jk}(i\frac{\partial}{\partial x}) = -\bar{p}_{kj}(-i\frac{\partial}{\partial x}),$$

равномерно по $t \in [0, T]$ ограничен. Топология пространства $\mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B'}$ сильнее топологии пространств X_p , $p \in [1, \infty]$, поэтому компоненты обобщенного решения задачи (1), в силу ограниченности, порождают на пространстве $\mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B'}$ равномерно по $t \in$

$[0, T]$ непрерывные функционалы в виде $\int_{\mathbb{R}} \overline{u_j(t, x)} \varphi(x) dx$ ($j = 1, \dots, m$), $\varphi \in \mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B'}$. Отсюда в результате пересмотра доказательства теоремы 2 п. 4 §3 гл. II [2] получаем, что для обобщенных решений задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, равенства (8) имеют место для любого $\varphi \in \mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B'}$. Поскольку при этом $\mathcal{S}_{\alpha, A}^{\beta, B}$ в силу достаточного богатства функциями является плотным множеством в пространстве X_p при любом $p \in [1, \infty]$, то на основе теорем §2 гл. II [2], получаем, что для обобщенных решений задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, имеет место единственность.

Таким образом, если $\tilde{K}_\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а $\mathbf{u}(t)$ — обобщенное решение задачи (1) в пространстве X_p^m , $p \in [1, \infty]$, для начального вектора $\mathbf{f}$, то при любых $\mathbf{f}_\delta$ таких, что $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \leq \delta$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} &\leq \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}\|_{X_p^m} + \|\mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f} - \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}(t) - K_\alpha * \mathbf{u}(t)\|_{X_p^m} + \|\mathbf{R}_\alpha(t)\| \delta. \end{aligned} \quad (9)$$

Если при этом $\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x) dx = 1$, то в силу обобщенного неравенства Минковского и неравенства для свертки, получаем следующую оценку:

$$\|\mathbf{u}(t) - K_\alpha * \mathbf{u}(t)\|_{X_p^m} \leq \int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_y(t)\|_{X_p^m} |K_\alpha(y)| dy, \quad (10)$$

где $\mathbf{u}_y(t)$ — вектор-функция с компонентами $u_j^{(y)}(t, x) = u_j(t, x - y)$ ($j = 1, \dots, m$) при $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}$.

При фиксированном $t_0 \in [0, T]$ рассмотрим функционал

$$\omega(\mathbf{u}(t_0), y) = \|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}_y(t_0)\|_{X_p^m},$$

зависящий от параметра $y \in \mathbb{R}$, для функции $\mathbf{u}(t)$ из $\mathcal{M}_p$, $p \in [1, \infty]$, — класса обобщенных решений задачи (1) в пространстве X_p^m , для которых выполняется следующее: при каждом $t \in [0, T]$ компоненты вектора $\mathbf{u}(t)$ — локально абсолютно непрерывные функции на $\mathbb{R}$; производные $\frac{\partial}{\partial x} u_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$), $t \in [0, T]$, принадлежат пространству X_p и ограничены на отрезке $[0, T]$.

Лемма 3. Для любой функции $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{M}_p$, $p \in [1, \infty]$, имеет место неравенство

$$\sup_{0 \leq t_0 \leq T} \omega(\mathbf{u}(t_0), y) \leq \begin{cases} 2M_1|y|, & \text{если } |y| \leq M/M_1, \\ 2M, & \text{если } |y| > M/M_1, \end{cases} \quad \text{где} \quad \begin{aligned} M &= \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{X_p^m}, \\ M_1 &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(t) \right\|_{X_p^m}. \end{aligned}$$

Доказательство. Прежде всего заметим простейшие свойства функционала $\omega(\mathbf{u}(t_0), y)$.

1) Равномерная по $y \in \mathbb{R}$ ограниченность:

$$\omega(\mathbf{u}(t_0), y) \leq \|\mathbf{u}(t_0)\|_{X_p^m} + \|\mathbf{u}_y(t_0)\|_{X_p^m} \leq 2M.$$

2) Четность по $y \in \mathbb{R}$: $\omega(\mathbf{u}(t_0), -y) = \omega(\mathbf{u}(t_0), y)$. При этом $\omega(\mathbf{u}(t_0), 0) = 0$.

3) $|\omega(\mathbf{u}(t_0), y_1) - \omega(\mathbf{u}(t_0), y_2)| \leq \omega(\mathbf{u}(t_0), y_1 - y_2)$ для любых $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

Теперь поскольку функция $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{M}_p$, то

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}_y(t_0)\|_{X_p^m} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}_y(t_0)}{y} - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(t_0) \right\|_{X_p^m} |y| + \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(t_0) \right\|_{X_p^m} |y|, \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \end{aligned}$$

при этом, как известно (§19.5 [4]), $\lim_{y \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{u}(t_0) - \mathbf{u}_y(t_0)}{y} - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(t_0) \right\|_{X_p^m} = 0$.

Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\omega(\mathbf{u}(t_0), y) \leq 2 \left\| \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(t_0) \right\|_{X_p^m} |y| \leq 2M_1|y|$$

для любых $y \leq \delta$ (база индукции). Пусть $\omega(\mathbf{u}(t_0), y_n) \leq 2M_1 y_n$ в точке $y_n = n\delta$, $n \in \mathbb{N}$; тогда

$$\begin{aligned}\omega(\mathbf{u}(t_0), y) &\leq \omega(\mathbf{u}(t_0), y_n) + |\omega(\mathbf{u}(t_0), y) - \omega(\mathbf{u}(t_0), y_n)| \leq \\ &\leq 2M_1 y_n + 2\omega(\mathbf{u}(t_0), y - y_n) \leq 2M_1 y\end{aligned}$$

для любых $y \in [y_n, y_n + \delta]$ (шаг индукции).

Отсюда в силу свойства 1) и 2) получаем утверждение леммы.

На основании изложенных результатов покажем, что имеет место.

Теорема 5. Пусть для функции $\tilde{K}$ выполняется следующее.

1) Условие в нуле: $\tilde{K}(0) = 1$.

2) Гладкость: непрерывная дифференцируемость на вещественной прямой, при этом производная $\tilde{K}'$ принадлежит пространству X_1 , локально абсолютно непрерывна на вещественной прямой и $\tilde{K}'' \in X_1$.

3) Убывание на бесконечности: в случае систем корректных по Петровскому

$$\tilde{K}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{rm+1}}\right), \quad \tilde{K}'(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{rm-r+1}}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty,$$

в случае условно-корректных систем

$$\tilde{K}(\xi) = O\left(\frac{1}{e^{(b+\varepsilon)T|\xi|^h} |\xi|^{rm}}\right), \quad \tilde{K}'(\xi) = O\left(\frac{1}{e^{bT|\xi|^h} |\xi|^{rm-r+1}}\right) \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty.$$

Определим $\tilde{K}_\alpha$, $\alpha > 0$, следующим образом: $\tilde{K}_\alpha(\xi) = \tilde{K}(\alpha\xi)$ для $\xi \in \mathbb{R}$.

Тогда для любой вектор-функции $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{M}_p$, $p \in [1, \infty]$, и любого вектора $\mathbf{f}_\delta \in X_p^m$ такого, что $\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \leq \delta$ ($\mathbf{u}(0) = \mathbf{f}$), справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{R}_\alpha(t)\mathbf{f}_\delta\|_{X_p^m} \leq \left(M_1 + 4M_1\|\tilde{K}''\|_{X_1}\left(1 + \ln \frac{M}{M_1\alpha}\right)\right)\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \sqrt[3]{4}\right)(A_\alpha B_\alpha)^{1/3}\delta,$$

где $M = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{X_p^m}$, $M_1 = \sup_{0 \leq t \leq T} \left\|\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}(t)\right\|_{X_p^m}$; A_α , B_α задаются формулами (6).

Доказательство. Очевидно, функции $\tilde{K}_\alpha$ удовлетворяют условиям теоремы 1. При этом из условия 1) и 2) в силу свойств преобразования Фурье следует, что

$$\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(x) dx = 1 \quad \text{и} \quad |K_\alpha(x)| \leq \begin{cases} 1/2\alpha, & \text{если } |x| \leq \alpha, \\ \alpha\|\tilde{K}''\|_{X_1}/x^2, & \text{если } |x| > \alpha. \end{cases}$$

Отсюда в силу леммы 3 оценка (10) примет вид

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(t) - K_\alpha * \mathbf{u}(t)\|_{X_p^m} &\leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{0 \leq t \leq T} \omega(\mathbf{u}(t), y) |K_\alpha(y)| dy \leq \\ &\leq 2 \int_0^\alpha 2M_1 y \frac{1}{2\alpha} dy + 2 \int_\alpha^{M/M_1} 2M_1 y \frac{\alpha\|\tilde{K}''\|_{X_1}}{y^2} dy + 2 \int_{M/M_1}^\infty 2M \frac{\alpha\|\tilde{K}''\|_{X_1}}{y^2} dy = \\ &= \left(M_1 + 4M_1\|\tilde{K}''\|_{X_1} \ln \frac{M}{M_1\alpha} + 4M_1\|\tilde{K}''\|_{X_1}\right)\alpha.\end{aligned}$$

Следовательно, в силу неравенства (9) и оценки (7), утверждение теоремы выполняется.

Пример функции $\tilde{K}$:

$$\tilde{K}(\xi) = \begin{cases} (1 + \xi^2)^{-(rm+1)/2}, & \text{в случае систем корректных по Петровскому,} \\ e^{-\xi^2}, & \text{в случае условно-корректных систем.} \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.
- [2] Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.
- [3] Мельникова И. В. Полугрупповая регуляризация некорректных задач. // Докл. РАН, 2003. Т. 393, № 6. С. 1–5.
- [4] Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1991.

О СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ¹

1. ВВЕДЕНИЕ

В $Q = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned} v_t + \sum_{i=1}^n v_i \partial v / \partial x_i - \mu_0 \operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(t, x) - \operatorname{Div}(\mu_1(S(v)\mathcal{E}(v)(t, x)) - \\ \mu_2 \operatorname{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \operatorname{grad} p(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \\ \operatorname{div}(t, x) v = 0, \quad (t, x) \in Q; \int_{\Omega} p(t, x) dx, \quad t \in [0, T]; \end{aligned} \quad (1)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (2)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ искомые векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t, x)$ – плотность внешних сил, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами

$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Дивергенция $\operatorname{Div} \mathcal{E}(v)$ матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк, $S(v) = \sum_{i,j=1}^2 (\partial v_i / \partial x_j)^2$, $\mu_0 > 0$, $\mu_2 \geq 0$ – некоторые константы, $\mu_1(s)$ неотрицательная функция. Вектор-функция $z(\tau; t, x)$ определяется как решение задачи Коши (в интегральной форме)

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^{\tau} v(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

При $\mu_1 = \mu_2 = 0$ система уравнений (1)-(2) является системой уравнений Навье-Стокса, описывающей движение ньютоновских жидкостей. При $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$ данная система описывает движение нелинейновязкой жидкости. В [3] для $n = 2$ установлена теорема существования и единственности сильных решений задачи (1)-(2). В случае $\mu_1 = 0$ система (1)-(2) описывает движение вязкоупругой жидкости. Локальная теорема существования и единственности сильных решений ($v \in W_q^{1,2}(Q_T)$, $q \geq 2$) задачи (1)-(2) для $n = 2$ установлена в [2]. Нелокальная теорема существования и единственности сильных решений ($v \in W_2^{1,2}(Q_T)$) установлена в [1] при $n = 2$ для регуляризованной задачи (1)-(2), получающейся из (1)-(2) заменой (3) на регуляризованную задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^{\tau} S_{\delta} v(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad (t, x) \in Q. \quad (4)$$

Введение оператора S_{δ} регуляризующего поле скоростей объясняется тем фактом, что поле скоростей v , определяемое как слабое или сильное обобщенное решение задачи (1)-(2) в классах функций, суммируемых с квадратом вместе с производными, не позволяет восстановить траектории z движения частиц, или же траектории не обладают свойствами регулярности (см[1]), необходимыми для корректности модели.

Нашей целью является доказательство теорема существования и единственности сильных решений регуляризованной задачи в общем случае для $n = 2$. При этом исследование начально-краевой задачи заменяется изучением эквивалентного

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-0008.

операторного уравнения. Для операторного уравнения определяется семейство аппроксимационных уравнений. Существование решения аппроксимационного уравнения устанавливается с помощью итерационного процесса на основе результатов [2] и [3]. Решение основного операторного уравнения получается как слабый предел решений аппроксимационных уравнений.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ обозначим $uv = u_i v_i$. Через $|u|$ будем обозначать евклидову норму вектора или матрицы. При этом здесь и далее мы применяем соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, изменяющимся от 1 до n .

Мы будем использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega)$, $L_p(Q)$, $W_q^k(\Omega)$, $W_q^{k,m}(Q)$ для пространств Лебега и Соболева функций на Ω и Q с вещественными значениями. При этом эти обозначения используются для скалярных, векторных или матричных функций, что понятно из контекста. Обозначим через (u, v) скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ для функций $u, v \in L_2(\Omega)$. Норма функции u в $L_2(\Omega)$, $L_2(Q)$, $W_2^k(\Omega)$, $W_2^{k,m}(Q)$ в каждом из пространств обозначается соответственно символом $|u|_0$, $\|u\|_0$, $|u|_k$, $\|u\|_{k,m}$.

Пусть $\mathbb{D}(\Omega)$ — пространство функций класса C^∞ с компактным носителем в Ω и $\mathbb{D}_s(\Omega) = \{u \in \mathbb{D}(\Omega) : \operatorname{div} u = 0\}$. Обозначим через H замыкание $\mathbb{D}_s(\Omega)$ в норме пространства $L_2(\Omega)$ и через V — замыкание $\mathbb{D}_s(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$. При этом норма $\|u\|_V$ функции в пространстве V определяется равенством: $\|u\|_V = |u|_1$. Обозначим через P ортогональный проектор в $L_2(\Omega)$ на H . Пусть $W_2^1(\Omega)$ — замыкание $\mathbb{D}(\Omega)$ в норме пространства $W_2^1(\Omega)$.

Рассмотрим в H линейный неограниченный оператор A , определенный на области определения $D(A) = W_2^2(\Omega) \cap H \cap W_2^1(\Omega)$ формулой $Av = -\Delta v$. Оператор является (см. [5]) положительно определенным самосопряженным оператором. Возьмем в качестве регуляризирующего оператора S_δ дробную степень $A^{-\delta}$, $\delta > 0$ оператора A и рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau (A^{-\delta} v)(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad (t, x) \in Q. \quad (5)$$

Нас будет интересовать разрешимость задачи (1)-(3), в которой z является решением задачи Коши (5).

Определение 1. Решением задачи называется пара функций (v, p) , $v \in W_2^{1,2}(Q_T)$, $p \in W_2^{0,1}(Q_T)$, удовлетворяющая при п.в. (t, x) уравнениям (1) и условиям (2).

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть $L_2(Q)$, $v \in V$. Пусть функция $\mu_1(s)$ удовлетворяет условиям

$$\mu_1(s) + 2\mu_1'(s) \geq 0, s \geq 0; \quad s|\mu_1(s)| \leq M, \quad s \geq a > 0. \quad (6)$$

Тогда задача (1)-(2), (5) имеет решение.

Далее говоря о решении задачи (1)-(2), (5) мы будем, как обычно, иметь в виду соленоидальную часть v пары (v, p) . При этом p находится через v стандартным образом (см. напр. [5]).

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим вспомогательное семейство зависящих от параметра $\varepsilon \geq 0$ аппроксимирующих задач

$$v_t + PD_\varepsilon(v) + \mu_0 Av + B(v) = F, \quad (7)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (8)$$

Здесь

$$B(v) = -P\text{Div}(\mu_1(S(v)\mathcal{E}(v)(t, x))); \quad (9)$$

$$C(v) = \mu_2 P\text{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \quad (10)$$

$$D_\varepsilon(v) = v_i(1 + \varepsilon|v|^2)^{-1} \partial v / \partial x_i; \quad (11)$$

$$F = \mu_2 C(v) + f, \quad (12)$$

z – решение задачи Коши (5). Очевидно при $\varepsilon = 0$ получается исходная задача в операторной форме. Обозначим $W = L_2(0, T : W_2^2(\Omega) \cap H \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(0, T : H)$.

Теорема 2. При любом $\varepsilon > 0$ задача (7)-(8) имеет решение $v \in W$, для которого справедливо неравенство

$$\|v\|_{1,2} \leq M \quad (13)$$

с не зависящей от ε константой M .

Существование решения задачи (1)-(2), (5) устанавливается с помощью предельного перехода в (7) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказательство теорем 1 и 2 проводится в разделах 4 и 5 соответственно. В разделе 3 приводятся необходимые свойства решения задачи Коши (5). Возникающие в цепочках неравенств константы, не зависящие от существенных параметров, будем обозначать через M .

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ.

Рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad (t, x) \in Q. \quad (14)$$

Обозначим через u_x матрицу Якоби вектор-функции $u(x)$, через u_{xx} тензор, состоящий из вторых производных от координат вектор-функции $u(x)$, а через $|u_x|_0^2$ и $|u_{xx}|_0^2$ сумму квадратов первых и вторых производных соответственно.

Лемма 1. (см. [2]) Пусть $v \in L_1(0, T; C^1(\Omega))$. Тогда задача Коши (14) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$|z_x(\tau; t, x)| \leq \exp\left(\int_t^\tau \|v(s, x)\|_{C^1(\Omega)} ds\right), \quad \tau, t \in [0, T]. \quad (15)$$

Пусть $v \in V$. Тогда для области определения $D(A^{-\delta})$ оператора $A^{-\delta}$ имеет место непрерывное вложение $D(A^{-\delta}) \subset W_2^{2\delta}(\Omega)$ (см. [4], с.329). Отсюда и из непрерывности вложения $W_2^\sigma(\Omega) \subset C(\Omega)$ при $\sigma > 1$ (см. [8], с.408) следует, что

$$\|A^{-\delta}v\|_{C^1(\Omega)} \leq M|v|_1. \quad (16)$$

Из леммы 1 и (16) вытекает

Лемма 2. Пусть $v \in L_2(0, T; V)$. Тогда задача Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \hat{v}(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega \quad (17)$$

однозначно разрешима и при всех $\tau, t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$\|z_x^\varepsilon(\tau; t, x)\|_{C(\Omega)} \leq M_1 \exp(M_2 \|v\|_{0,1}). \quad (18)$$

Здесь и далее полагаем $A^{-\delta}v = \hat{v}$.

Пусть $z(\tau; t, x)$ решение задачи Коши (17). Если $v \in L_2(0, T; V \cap C^1(\Omega))$, то $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ при п.в. (t, x) . Следовательно, $\det z_x(\tau; t, x) = 1$, и функция

$$y = z(\tau; t, x) \quad (19)$$

определяет диффеоморфизм Ω на Ω . При этом справедлива

Лемма 3. Пусть $g(x) \in L_2(\Omega)$, $z(\tau; t, x)$ решение задачи Коши (17) для $v \in L_2(0, T; V \cap C^1(\Omega))$. Тогда $g(z(\tau; t, x)) \in L_2(\Omega)$ при п.в. τ, t , и $|g(z(\tau; t, x))|_0 = |g(x)|_0$.

Лемма 4. Пусть $v^\varepsilon \in L_2(0, T; V)$, $\varepsilon \geq 0$ причем

$$\|v^\varepsilon\|_{0,1} \leq M. \quad (20)$$

Тогда множество $z^\varepsilon(\tau; t, x)$ решений задач Коши

$$z^\varepsilon(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \hat{v}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega \quad (21)$$

компактно в $C(\hat{Q})$, $\hat{Q} = [0, T] \times [0, T] \times \Omega$.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Рассмотрим задачу

$$L_\varepsilon(v) \equiv v_t^\varepsilon + PD_\varepsilon(v^\varepsilon) + \mu_0 A v^\varepsilon + B(v^\varepsilon) = F, \quad (22)$$

$$v^\varepsilon(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0, \quad v^\varepsilon(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (23)$$

В [3] была установлена разрешимость задачи (22)-(23). Сформулируем этот результат в удобной для нас форме.

Лемма 5. Пусть $F \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ задача (22)-(23) имеет единственное решение $v \in W$, и справедлива равномерная по $\varepsilon > 0$ оценка

$$\max_{0 \leq s \leq t} |v^\varepsilon(s, x)|_0^2 + \int_0^t |v^\varepsilon(s, x)|_1^2 ds \leq C_1(|v^0|_0^2 + \int_0^t |F(s, x)|_1^2 ds), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (24)$$

с константой C_1 не зависящей от t, ε, F, v_0 , и оценка

$$\|v^\varepsilon\|_{1,2} \leq \varphi(C_1 \|v^\varepsilon\|_{0,1})(|v^0|_1 + \|F\|_0), \quad (25)$$

где $\varphi(s)$ некоторая положительная монотонно возрастающая по $s \geq 0$ функция.

Очевидно, из (24) следует, что $\|v^\varepsilon\|_{1,2}$ оценивается некоторым числом, зависящим от $|v^0|_1$ и $\|F\|_0$, но нам важен именно характер этой зависимости, выраженный правой частью (25).

Воспользуемся этим обстоятельством для доказательства разрешимости задачи (7)-(8). Построим последовательные приближения с помощью итерационного процесса

$$L_\varepsilon(v^{n+1}) = f - \mu_2 P \operatorname{Div} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad (26)$$

$$v^{n+1}(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega_0; \quad v^{n+1}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega, \quad (27)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$, $v^0(t, x) = v^0(x)$, а $z^n(\tau; t, x)$ — решение задачи Коши

$$z^n(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau \hat{v}^n(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad (t, x) \in [0, T] \times \partial\Omega. \quad (28)$$

Лемма 6. При любом n задача (26)-(27) имеет единственное решение $v \in W$, и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq s \leq t} |v^{n+1}(s, x)|_0^2 + \int_0^t |v^{n+1}(s, x)|_1^2 ds \leq C_3(|v^0|_0^2 +$$

$$\int_0^t |f(s, x)|_0^2 ds + \int_0^t \int_0^\tau |v^n(s, x)|_1^2 ds d\tau$$

с константой C_3 , не зависящей от t, ε, F, v_0 .

Из леммы 6 вытекает

Лемма 7. В условиях леммы 6 при любом n для решений $v \in W$ задач (26)-(27) справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} |v^{n+1}|_0^2 + \|v^{n+1}\|_{0,1}^2 \leq C$$

с константой C не зависящей от n, ε (но зависящей от f и v^0).

Вернемся к задаче (26)-(27). Мы установили, что при любом n задача (26)-(27) имеет единственное решение v^{n+1} , и справедлива оценка (30). Это означает, что множество является слабо компактным в $L_2(0, T; V)$. Без ограничения общности можно считать, что v^n слабо сходится в $L_2(0, T; V)$ к некоторой v^ε . Умножим (26) в $L_2(0, T; H)$ скалярно на гладкую и финитную по (t, x) функцию $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по частям. Мы получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (v^{n+1}(t, x), \varphi_t(t, x)) dt + \int_0^T (D_\varepsilon(v^{n+1})(t, x), \varphi(t, x)) dt + \\ & \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^{n+1})(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt + \int_0^T (\mu_1(S(v^{n+1}))\mathcal{E}(v^{n+1})(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt = \\ & \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt - \mu_2 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Обозначим последний интеграл через I^n . Сделаем в подинтегральном выражении замену переменных

$$y = z^n(s; t, x) \quad (32)$$

и, используя лемму 3, получим

$$\begin{aligned} I^n &= \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) ds dt = \\ &= \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v^n)(s, y), \mathcal{E}(\varphi)(t, z^n(t; s, y)) dy ds dt. \end{aligned}$$

Из слабой сходимости v^n к v^ε в $L_2(0, T; V)$ и из равномерной сходимости z^n к z вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I^n = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, y), \mathcal{E}(\varphi)(t, z^\varepsilon(t; s, y)) dy ds dt. \quad (33)$$

Рассмотрим задачу Коши (28). Умножив (28) скалярно в $L_2(0, T; H)$ на гладкую и финитную по x функцию $\varphi(x)$, получим

$$\int_{\Omega} z^n(\tau, t; x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} x \varphi(x) dx + \int_t^{\tau} \int_{\Omega} \hat{v}^n(s, z^n(s; t, x)) \varphi(x) dx ds. \quad (34)$$

Сделаем в последнем выражении замену переменных (32), имеем

$$\int_{\Omega} z^n(\tau, t; x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} x \varphi(x) dx + \int_t^{\tau} \int_{\Omega} \hat{v}^n(s, y) \varphi(z^n(t, s; y)) dy ds. \quad (35)$$

Принимая во внимание равномерную сходимость z^n к z из и слабую сходимость v^n к v^ε в $L_2(0, T; V)$, получаем, что

$$\int_{\Omega} z^\varepsilon(\tau, t; x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} x \varphi(x) dx + \int_t^{\tau} \int_{\Omega} v^\varepsilon(s, y) \varphi(z^\varepsilon(t, s; y)) dy ds. \quad (36)$$

Отметим, что из равномерной сходимости z^n к z и из тождества $z^n(s; t, z^n(t, s; x)) = x$ следует, что $z^\varepsilon(s; t, z^\varepsilon(t, s; x)) = x$. Таким образом, преобразования $z^\varepsilon(t, s, x)$ и $z^\varepsilon(t, s, x)$ области Ω являются взаимно обратными. Делая в последнем интеграле в (36) замену переменных $y = z(t, s, x)$ и учитывая произвольность φ , получаем, что

$$z^\varepsilon(\tau, t, x) = x + \int_t^{\tau} \hat{v}^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) ds. \quad (37)$$

Сделаем в (33) замену переменных (37), получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I^n = \int_0^T \int_0^t \int_{\Omega} \mathcal{E}(v)^\varepsilon(s, z^\varepsilon(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi(t, x)) dx ds dt.$$

Пользуясь соотношением, делая предельный переход как в [3], имеем

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (v^\varepsilon(t, x), \varphi_t(t, x)) dt + \int_0^T (D_\varepsilon(v^\varepsilon)(t, x), \varphi(t, x)) dt + \\ & \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v)^\varepsilon(t, x), (\mathcal{E}(\varphi)(t, x))) dt + \int_0^T (\mu_1(S(v^\varepsilon)) \mathcal{E}(v)^\varepsilon(t, x), (\mathcal{E}(\varphi)(t, x))) dt = \\ & \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt + \mu_2 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v)^\varepsilon(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt. \end{aligned} \quad (38)$$

Из полученной ранее равномерной сходимости v^n к v^ε в W и слабой полноты вытекает, что $v^\varepsilon \in W$. Кроме того, при фиксированных s и t $z(s; t, x)$ имеет непрерывные производные по x_i в Ω . Это позволяет проинтегрировать в (38) по частям и перебросить производные с φ на содержащие v^ε сомножители. Воспользовавшись теперь произвольностью φ , получаем, что v^ε является решением задачи (22)-(23). Теорема 2 доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 2 следует, что для решения v^ε задачи (22)-(23) справедливо неравенство

$$\|v^\varepsilon\|_{1,2} \leq C, \quad (39)$$

где C не зависит от ε , но зависит от f и v^0 .

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Рассмотрим множество решений задач (22)-(23). Умножим (22) в $L_2(0, T; H)$ скалярно на гладкую и финитную по (t, x) функцию $\varphi(t, x)$ и проинтегрируем по частям. Мы получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (v_t^\varepsilon(t, x), \varphi_t(t, x)) dt + \int_0^T (D_\varepsilon(v^\varepsilon)(t, x), \varphi(t, x)) dt + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt + \\ & \int_0^T (\mu_1(S(v^\varepsilon))\mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi(t, x))) dt = \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt + \\ & \mu_2 \int_0^T \left(\int_0^t (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, z(s; t, x))) ds, \mathcal{E}(\varphi)(t, x) \right) dt. \end{aligned} \quad (1)$$

Из (39) вытекает, что множество v^ε является слабо компактным в гильбертовом пространстве W . Без ограничения общности можно считать, что существует последовательность ε_n (будем считать $\varepsilon_n = \varepsilon$), для которой v^ε слабо сходится в W к некоторой v . В [3] показано, что пределе левая часть (1) дает левую часть (1) с заменой v^ε на v и $D_\varepsilon(v^\varepsilon)$ на $D_0(v)$.

Рассмотрим правую часть. Сделаем во втором слагаемом замену $x = z^\varepsilon(t; s, y)$:

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon &= \mu_2 \int_0^T \int_0^t (\mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, z(s; t, x)), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) ds dt = \\ & \mu_2 \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, y) \mathcal{E}(\varphi)(t, z^\varepsilon(t; s, y)) dy ds dt. \end{aligned}$$

Переходя к пределу так же, как при доказательстве теоремы 2 в аналогичных слагаемых, имеем

$$Q = \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} Q^\varepsilon = \mu_2 \int_0^T \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \mathcal{E}(v)(s, y) \mathcal{E}(\varphi)(t, z^\varepsilon(t; s, y)) dy ds dt.$$

Делая замену $y = z^\varepsilon(s; t, x)$ интегрируя по частям и получаем, что

$$Q = \mu_2 \int_0^T \int_0^T \int_0^t \int_\Omega \text{Div} \mathcal{E}(v)(s, x) \varphi(t, x) ds dt.$$

Обоснование того, что v является решением задачи Коши (5) и законность интегрирования по частям проверяется так же, как при доказательстве теоремы 2.

Итак, нами показано, что любой гладкой финитной φ справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T (v_t^\varepsilon(t, x), \varphi(t, x)) dt + \int_0^T (D_\varepsilon(v^\varepsilon)(t, x), \varphi(t, x)) dt - \mu_0 \int_0^T (\text{Div} \mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \varphi(t, x)) dt - \\ & \int_0^T (\text{Div} \mu_1(S(v^\varepsilon))\mathcal{E}(v^\varepsilon)(t, x), \mathcal{E}(\varphi)(t, x)) dt = \int_0^T (f(t, x), \varphi(t, x)) dt + \end{aligned} \quad (2)$$

$$\mu_2 \int_0^T \left(\int_0^t (\operatorname{Div} \mathcal{E}(v^\varepsilon)(s, z(s; t, x))) ds, \varphi(t, x) \right) dt.$$

Отсюда в силу произвольности φ следует, что v является решением задачи (1)-(2), (5). Существование решения задачи (1)-(2), (5) доказано. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой жидкости // Известия ВУЗов. Математика.- 2004. - №9(508). - С. 24-40.
- [2] Orlov V.P., Sobolevskii P.E. On mathematical models of a viscoelasticity with a memory. //Differential and Integral Equations. - 1991. - V.4. - № 1. - pp.103-115.
- [3] Орлов В.П., Соболевский П.Е. О гладкости обобщенных решений уравнений движения почти ньютоновской жидкости.// Численные методы механики сплошной среды. - 1985. - т.16. - № 1. - с.107-119.
- [4] Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. - М.:Наука. 1970. - 288с.
- [5] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.:Наука. 1970. - 204с.
- [6] Литвинов В.Г. Движение нелинейно вязкой жидкости. - М.:Наука. 1982. - 376с.
- [7] Иосида К. Функциональный анализ. - М.:Мир. 1967. - 624с.
- [8] Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. - М.:Мир. 1980. - 664с.
- [9] Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ.- М.: Мир. 1987. - 408с.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Эллиптические дифференциальные уравнения с вырождением рассматривались многими авторами (см., например [1, 2, 3] и имеющуюся там библиографию).

В работе [4] рассматривались несамосопряженные эллиптические дифференциально-разностные операторы L_R порядка $2m$ с вырождением вида: $L_R u(x) = L R u(x)$, где L -сильно эллиптический дифференциальный оператор, а R -разностный оператор, эрмитова часть которого является неотрицательным вырожденным оператором. Интерес к таким операторам вызван появлением ряда принципиально новых свойств даже по сравнению с сильно эллиптическими дифференциально-разностными операторами [5], а также приложениями полученных результатов к некоторым нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы [6].

В настоящей работе рассматриваются несамосопряженные дифференциально-разностные операторы второго порядка, в которых каждому оператору дифференцирования соответствует свой разностный оператор. Получены энергетические неравенства, из которых следует m -секториальность рассматриваемых дифференциально-разностных операторов.

1. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В настоящем параграфе мы сформулируем свойства разностных операторов в пространстве $L_2(Q)$, необходимые нам в дальнейшем. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из нулей и коэффициентов разностного оператора R . Доказательства этих свойств содержатся в работе [4].

1. Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$, определенный по формуле:

$$Ru(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x+h), \quad (1)$$

где a_h -комплексные числа; множество M состоит из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^2$ с целочисленными координатами; $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее условие:

1.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ -прямоугольник $(0, a) \times (0, b)$.

Введем операторы I_Q, P_Q, R_Q следующим образом.

$I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ -оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus Q$; $P_Q : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(Q)$ -оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^2)$ на Q ; $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$;

Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M , а через Q_r открытые связные компоненты множества

$$Q \setminus \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h).$$

Определение 1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r ($r = 1, 2, \dots$) назовем *разбиением области* Q .

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ конечно.

Лемма 1. $\bigcup_r \partial Q_r = \left(\bigcup_{h \in M} (\partial Q + h) \right) \cap \overline{Q}$.

Лемма 2. 1) $\bigcup_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$

2) для любых Q_{r_1} и $h \in M$ либо найдется Q_{r_2} такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Q}$.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl} , где s —номер класса ($s = 1, 2, \dots$), а l —порядковый номер данной подобласти в s -ом классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} .

Лемма 3. Операторы $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ и $P_Q : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(Q)$ —ограниченные; при этом $I_Q^* = P_Q$, т.е. $(I_Q u, v)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = (u, P_Q v)_{L_2(Q)}$ для любых $u \in L_2(Q)$, $v \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

Лемма 4. Операторы $R : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ и $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ —ограниченные;

$$R_Q^* = P_Q R^* I_Q, \quad R^* u(x) = \sum_{h \in M} \bar{a}_h u(x - h).$$

Обозначим через $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup_l Q_{sl}$, а через $P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ —оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ ($l = 1, \dots, N(s)$). Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\bigcup_l Q_{sl}).$$

Лемма 5. $L_2(\bigcup_l Q_{sl})$ —инвариантное подпространство оператора R_Q .

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2(\bigcup_l Q_{sl}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1}),$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in \overline{Q_{s1}}),$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$; h_{sl} —таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ ($h_{s1} = 0$); $L_2^N(Q_{s1}) = \prod_l L_2(Q_{s1})$.

Лемма 6. Оператор $R_{Q_s} : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$, определенный по формуле

$$R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1},$$

является оператором умножения на квадратную матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & \text{если } h = h_{sj} - h_{si} \in M, \\ 0, & \text{если } h = h_{sj} - h_{si} \notin M \end{cases}$$

Лемма 7. Спектр оператора R_Q совпадает с объединением спектров конечного числа матриц R_{s_ν} ($\nu = 1, \dots, n_1$). Каждая точка спектра $\sigma(R_Q)$ является собственным значением бесконечной кратности.

Лемма 8. Если оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ —самосопряженный, то оператор $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ —также самосопряженный.

Лемма 9. Для самосопряженности оператора $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ —необходимо и достаточно, чтобы все матрицы R_{s_ν} ($\nu = 1, \dots, n_1$) были эрмитовы.

2. Рассмотрим свойства разностных операторов $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, имеющих нетривиальное ядро.

Обозначим $\mathcal{N}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ соответственно ядро и образ некоторого оператора.

Лемма 10. $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Q_s}) \oplus \mathcal{R}(R_{Q_s}^*)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Q_s}^*) \oplus \mathcal{R}(R_{Q_s})$.

Обозначим через $A_Q = (R_Q + R_Q^*)/2$, $B_Q = (R_Q - R_Q^*)/2i$. Очевидно,

$$R_Q = A_Q + iB_Q.$$

Операторы A_Q и B_Q называются соответственно *вещественной и мнимой частями оператора R_Q* . Положим $A_{Q_s} = U_s A_Q U_s^{-1}$ и $B_{Q_s} = U_s B_Q U_s^{-1}$. В силу леммы 6 операторы $A_{Q_s}, B_{Q_s} : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$ являются операторами умножения на матрицы $A_s = (R_s + R_s^*)/2$, $B_s = (R_s - R_s^*)/2i$ соответственно. Обозначим через

$$P^R, P^{R^*}, P^A, P^B : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$$

и

$$P_s^R, P_s^{R^*}, P_s^A, P_s^B : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$$

операторы ортогонального проектирования на подпространства

$$\mathcal{R}(R_Q), \mathcal{R}(R_Q^*), \mathcal{R}(A_Q), \mathcal{R}(B_Q)$$

и

$$\mathcal{R}(R_{Q_s}), \mathcal{R}(R_{Q_s}^*), \mathcal{R}(A_{Q_s}), \mathcal{R}(B_{Q_s})$$

соответственно.

Лемма 11. $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q) \oplus \mathcal{R}(R_Q^*)$, $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) \oplus \mathcal{R}(R_Q)$, при этом

$$\| P^{R^*} u \|_{L_2(Q)} \leq c \| R_Q u \|_{L_2(Q)},$$

$$\| P^R u \|_{L_2(Q)} \leq c \| R_Q^* u \|_{L_2(Q)}$$

для любой $u \in L_2(Q)$, где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от u .

Ограниченный самосопряженный оператор A из гильбертова пространства H в H назовем *положительным*, если $(Au, u)_H > 0$ для любого $0 \neq u \in H$, и *неотрицательным*,

если $(Au, u)_H \geq 0$ для любого $u \in H$. Назовем оператор A *положительно определенным*,

если $(Au, u)_H > c(u, u)_H$ для любого $u \in H$, где $c > 0$.

Лемма 12. Пусть $\mathcal{N}(A_{s_\nu}) \subset \mathcal{N}(B_{s_\nu})$ ($\nu = 1, \dots, n_1$). Тогда $\mathcal{N}(A_Q) \subset \mathcal{N}(B_Q)$ и для любой функции $u \in L_2(Q)$

$$\| B_Q u \|_{L_2(Q)} \leq c_1 \| A_Q u \|_{L_2(Q)}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u .

Если, кроме того, матрицы A_{s_ν} ($\nu = 1, \dots, n_1$) — неотрицательны, то оператор A_Q — неотрицательный, при этом $\mathcal{N}(R_Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) = \mathcal{N}(A_Q)$ и $\mathcal{R}(R_Q) = \mathcal{R}(R_Q^*) = \mathcal{R}(A_Q)$

3. В заключение этого параграфа рассмотрим свойства разностных операторов R_Q в пространствах Соболева.

Обозначим через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций с нормой

$$\| u \|_{W_2^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$. Через $W_2^{k-1/2}(\Gamma)$ обозначим пространство следов на Γ с нормой

$$\|v\|_{W_2^{k-1/2}(\Gamma)} = \inf \|u\|_{W_2^k(Q)} \quad (u \in W_2^k(Q) : u|_\Gamma = v),$$

где $\Gamma \subset \overline{Q}$ — $(n-1)$ -мерное гладкое многообразие. Различные способы введения эквивалентных норм в пространствах Соболева нецелого порядка можно найти, например, в [9, гл. I].

Лемма 13. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\dot{W}_2^k(Q)$ в $W_2^k(Q)$, при этом для всех $u \in \dot{W}_2^k(Q)$*

$$\mathcal{D}^\alpha R_Q u = R_Q \mathcal{D}^\alpha u \quad (|\alpha| \leq k).$$

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Рассмотрим дифференциально-разностный оператор L_R с областью определения $D(L_R) = \dot{C}^\infty(Q)$, действующий по формуле

$$L_R u(x) = -\frac{\partial}{\partial x_1} R_{1Q} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} R_{2Q} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}. \quad (2)$$

Здесь $R_{1Q} = P_Q R_1 I_Q$, $R_{2Q} = P_Q R_2 I_Q$; $R_1, R_2 : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ —разностные операторы, определенные по формулам

$$R_1 u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h), \quad R_2 u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} b_h u(x+h), \quad (3)$$

где a_h, b_h — комплексные числа; множество $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^2$ с целочисленными координатами; $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим $A_{js} = (R_{js} + R_{js}^*)/2$, $B_{js} = (R_{js} - R_{js}^*)/2i$, $j = 1, 2$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия :

- 2.1) Матрицы A_{1s} —неотрицательны, а матрицы A_{2s} —положительно определены.
- 2.2) $\operatorname{Re} a_0 > 0$, $\operatorname{Re} b_0 > 0$.
- 2.3) Множество $S_1 = \{s : \det A_{1s} = 0\}$ — не пусто, и $\mathcal{N}(A_{1s}) \subset \mathcal{N}(B_{1s})$ ($s \in S_1$).

Лемма 14. *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1. и пусть выполнены условия 2.1–2.3, тогда*

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|A_{1Q} u_{x_1}\|_{L_2(Q)}^2 + c_2 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)}^2, \quad (\forall u \in \dot{C}^\infty(Q)). \quad (4)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем:

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} = (A_{1Q} u_{x_1}, u_{x_1})_{L_2(Q)} + (A_{2Q} u_{x_2}, u_{x_2})_{L_2(Q)}.$$

Т.к. A_2 — положительно определенный оператор, то

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} \geq (A_{1Q} u_{x_1}, u_{x_1})_{L_2(Q)} + c_2 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Далее введем оператор ортогонального проектирования на образ разностного оператора A_{1Q} :

$$P^{A_1} : L_2(Q) \rightarrow \mathcal{R}(A_{1Q})$$

$$\begin{aligned} (A_{1Q} v, v)_{L_2(Q)} &= (A_{1Q} v, (P^{A_1} + (I - P^{A_1}))v)_{L_2(Q)} = \\ &= (A_{1Q} v, P^{A_1} v)_{L_2(Q)} + (A_{1Q} v, (I - P^{A_1})v)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Используя лемму 11

$$(A_{1Q} v, (I - P^{A_1})v)_{L_2(Q)} = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (A_{1Q} v, v)_{L_2(Q)} &= (A_{1Q} v, P^{A_1} v)_{L_2(Q)} = (A_{1Q} P^{A_1} v, P^{A_1} v)_{L_2(Q)} \geq c_1 \|P^{A_1} v\|_{L_2(Q)}^2 \geq \\ &\geq c_3 \|A_{1Q} P^{A_1} v\|_{L_2(Q)}^2 \geq c_3 \|A_{1Q} v\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(A_1 Q v, v)_{L_2(Q)} \geq c_3 \|A_1 Q v\|_{L_2(Q)}^2, \quad \forall v \in \dot{C}^\infty(Q). \quad (5)$$

Из 5 имеем

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} \geq c_3 \|A_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)}^2 + c_2 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)}^2.$$

Лемма 15. Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1. и пусть выполнены условия 2.1 – 2.3.

Тогда существуют такие константы $c_4, c_5 > 0$, что для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$.

$$|\operatorname{Re}(L_R u, v)_{L_2(Q)}| \leq c_4 \|A_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \|A_1 Q v_{x_1}\|_{L_2(Q)} + c_5 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)} \|v_{x_2}\|_{L_2(Q)}, \quad (6)$$

$$|\operatorname{Im}(L_R u, v)_{L_2(Q)}| \leq c_4 \|A_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \|A_1 Q v_{x_1}\|_{L_2(Q)} + c_5 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)} \|v_{x_2}\|_{L_2(Q)}. \quad (7)$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство 6. Интегрируя по частям и используя леммы 11, 13, а также ограниченность оператора $A_2 Q$, мы имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(L_R u, v)_{L_2(Q)}| &= |(A_1 Q u_{x_1}, P^{A_1} v_{x_1})_{L_2(Q)} + (A_2 Q u_{x_2}, v_{x_2})_{L_2(Q)}| \leq \\ &\leq k_1 \|A_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \|A_1 Q v_{x_1}\|_{L_2(Q)} + \|A_2 Q u_{x_2}\|_{L_2(Q)} \|v_{x_2}\|_{L_2(Q)} \leq \\ &\leq k_1 \|A_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \|A_1 Q v_{x_1}\|_{L_2(Q)} + k_2 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)} \|v_{x_2}\|_{L_2(Q)} \end{aligned} \quad (8)$$

для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Аналогично получим

$$|\operatorname{Im}(L_R u, v)_{L_2(Q)}| \leq k_3 \|B_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \|B_1 Q v_{x_1}\|_{L_2(Q)} + k_4 \|u_{x_2}\|_{L_2(Q)} \|v_{x_2}\|_{L_2(Q)}. \quad (9)$$

В силу условия 2.3 и лемм 12, 13

$$\|B_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \leq k_5 \|A_1 Q u_{x_1}\|_{L_2(Q)} \quad (10)$$

для любой $u \in \dot{C}^\infty(Q)$. Таким образом из 9, 10 получаем неравенство 7.

Автор глубоко благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за внимание к работе и ряд ценных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. ДАН СССР. Т.77. – 1951. – 181-183.
- [2] Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка. Математика. Период. сб. перев. ин. статей. Т.7. №6. – 1963. – 99-121.
- [3] Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Итоги науки. Серия "Матем. анализ". М.:ВИНИТИ. – 1971.
- [4] Skubachevskii A. Elliptic functional differential equations and applications. "Birkhauser". Basel-Boston-Berlin. – 1997.
- [5] Skubachevskii A. The first boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations. J. Differential Equations. V. 63 №3. – 1986.
- [6] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. ДАН СССР. Т.185. №4 – 1969.
- [7] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. – 1972.
- [8] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. – 1976.
- [9] Лионс Ж., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир. – 1971.

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ¹

В статье исследуется вопрос об однократной полноте в пространствах $L_2[0, 1]$ и $L_2[0, \sigma]$, $0 < \sigma < 1$, системы собственных и присоединенных функций пучка обыкновенных дифференциальных операторов, порожденных дифференциальным выражением с постоянными коэффициентами, корни характеристического уравнения которого лежат на одном луче, и полураспадающимися однородными краевыми условиями специальной структуры.

In the paper the questions of one-fold completeness in the spaces $L_2[0, 1]$ and $L_2[0, \sigma]$, $0 < \sigma < 1$, of the system of eigenfunctions and associated functions are investigated for the pencil of ordinary differential operators, generated by a differential expression with constant coefficients and characteristic equation roots on the same ray, and semisplitting homogeneous boundary conditions of a special structure.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пространстве $L_2[0, 1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный однородным дифференциальным выражением n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk} \lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbb{C}, \quad p_{0n} \neq 0, \quad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными однородными краевыми условиями специальной структуры

$$\begin{aligned} U_j(y, \lambda) &:= \sum_{s+k=\kappa_j} \lambda^s \alpha_{jsk} y^{(k)}(0) = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ U_n(y, \lambda) &:= \sum_{s+k=\kappa_n} \lambda^s \left(\alpha_{nsk} y^{(k)}(0) + \beta_{nsk} y^{(k)}(1) \right) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\alpha_{jsk}, \beta_{nsk} \in \mathbb{C}$, $\kappa_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ – порядок j -го краевого условия.

Пусть корни $\{\omega_k\}_1^n$ характеристического уравнения

$$\sum_{s+k=n} p_{sk} \omega^k = 0$$

попарно различны, отличны от нуля и лежат на одном луче, исходящем из начала координат. Не нарушая общности, можно считать

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n. \quad (3)$$

Решается задача о нахождении условий на параметры пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует m -кратная ($1 \leq m \leq n$) полнота системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) этого пучка в пространстве $L_2[0, 1]$ или, если полнота не имеет места на всем отрезке $[0, 1]$, хотя бы в пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $0 < \sigma < 1$.

Эта задача актуальна только для нерегулярных пучков $L(\lambda)$ [1, 2] (или вырожденных, как их иногда называют) с "плохим" поведением функции Грина при $|\lambda| \rightarrow \infty$ (например, экспоненциальный рост в секторах раствора $\geq \pi$). При "хорошем" поведении функции Грина (например, степенная ограниченность при $|\lambda| \rightarrow \infty$ на

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 03-01-00169).

некоторых лучах) эта задача уже решена [2, 3]. Пучок (1)–(2) в предположении (3) является заведомо нерегулярным. Вопрос о кратной полноте системы его с.п.ф. до сих пор практически не исследован.

Основополагающей по этой задаче является работа [4]. Большой вклад в ее решение внесли работы [5, 6, 7, 8, 9]. Наиболее полное исследование вопроса об n - и m -кратной ($1 \leq m \leq n$) полноте системы с.п.ф. пучков с постоянными коэффициентами проведено в работах [10, 11].

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Система функций $y_k(x, \lambda) = \exp(\lambda \omega_k x)$, $k = \overline{1, n}$, является при $\lambda \neq 0$ фундаментальной системой решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$. Обозначив

$$U_{j0}(y, \lambda) := \sum_{s+k=\varkappa_j} \lambda^s \alpha_{jsk} y^{(k)}(0), \quad j = \overline{1, n},$$

$$U_{n1}(y, \lambda) := \sum_{s+k=\varkappa_n} \lambda^s \beta_{nsk} y^{(k)}(1),$$

введем в рассмотрение вектор-столбцы длины n при $k = \overline{1, n}$

$$V_k = (v_{1k}, v_{2k}, \dots, v_{nk})^T = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} U_{10}(y_k, \lambda), \frac{1}{\lambda^{\varkappa_2}} U_{20}(y_k, \lambda), \dots, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} U_{n0}(y_k, \lambda) \right)^T,$$

$$W_k = (w_{1k}, w_{2k}, \dots, w_{nk})^T = e^{-\lambda \omega_k} \left(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} U_{n1}(y_k, \lambda) \right)^T.$$

С учетом этих обозначений характеристический определитель пучка $L(\lambda)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det (U_j(y_k, \lambda))_{j,k=1}^n = \lambda^{\varkappa} \left| V_1 + e^{\lambda \omega_1} W_1, V_2 + e^{\lambda \omega_2} W_2, \dots, V_n + e^{\lambda \omega_n} W_n \right| = \\ &= \lambda^{\varkappa} \tilde{\Delta}(\lambda), \end{aligned}$$

где $\varkappa = \sum_{j=1}^n \varkappa_j$ – суммарный порядок краевых условий (2). В силу того, что $\text{rank}(W_k, W_l) = 1$, $1 \leq k, l \leq n$, для определителя $\tilde{\Delta}(\lambda)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(\lambda) &= |V_1 V_2 \dots V_n| + e^{\lambda \omega_1} |W_1 V_2 \dots V_n| + \dots + e^{\lambda \omega_n} |V_1 \dots V_{n-1} W_n| = \\ &= \Delta_0 + e^{\lambda \omega_1} \Delta_1 + \dots + e^{\lambda \omega_n} \Delta_n, \end{aligned}$$

где коэффициенты $\Delta_j = |V_1 \dots V_{j-1} W_j V_{j+1} \dots V_n|$, $j = \overline{1, n}$, не зависят от λ . Если через $(\Delta_0)_{jk}$ обозначить алгебраическое дополнение элемента (j, k) в определителе Δ_0 , то очевидно

$$\Delta_j = w_{nj} (\Delta_0)_{nj}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Таким образом, ненулевые собственные значения пучка $L(\lambda)$ являются корнями уравнения

$$\Delta_0 + e^{\lambda \omega_1} \Delta_1 + \dots + e^{\lambda \omega_n} \Delta_n = 0. \quad (5)$$

Так как выполняется условие (3), то хорошо известно, что множество корней уравнения (5) образует счетное множество с единственной предельной точкой на бесконечности, которое лежит в некоторой вертикальной полосе. Точка $\lambda = 0$ может быть с.з., а может и не быть, даже если выполняется условие

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_n = 0.$$

Обозначим через Λ множество ненулевых с.з. пучка $L(\lambda)$.

В качестве порождающей функции для для системы с.п.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з., возьмем функцию (см. [1], с. 84)

$$y(x, \lambda) := \frac{1}{\lambda^{\varkappa - \varkappa_n}} \begin{vmatrix} U_{10}(y_1, \lambda) & U_{10}(y_2, \lambda) & \dots & U_{10}(y_n, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n-10}(y_1, \lambda) & U_{n-10}(y_2, \lambda) & \dots & U_{n-10}(y_n, \lambda) \\ \exp(\lambda \omega_1 x) & \exp(\lambda \omega_2 x) & \dots & \exp(\lambda \omega_n x) \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по элементам последней строки, получим

$$y(x, \lambda) = a_1 \exp(\lambda \omega_1 x) + a_2 \exp(\lambda \omega_2 x) + \dots + a_n \exp(\lambda \omega_n x), \quad (6)$$

где

$$a_j = (\Delta_0)_{nj}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

причем из (4) и (7) следует, что

$$\Delta_j = w_{nj} a_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Таким образом, порождающая функция (6) есть линейная комбинация экспонент с показателями, лежащими на одном луче. Именно такие порождающие функции изучались в работах [12, 13, 14]. Было, в частности, показано, что при любых $a_j \in \mathbb{C}$ система с.п.ф., порожденная такой функцией, не является n -кратно полной ни в каком пространстве $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$, и имеет в каждом таком пространстве бесконечный дефект относительно n -кратной полноты. Найдены также достаточные условия m -кратной ($2 \leq m \leq n - 1$) неполноты в $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 0$, с бесконечным дефектом, в частности, достаточные условия двукратной неполноты.

В данной статье исследуются вопросы однократной полноты системы с.п.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих ненулевым с.з., в пространствах $L_2[0, 1]$ и $L_2[0, \sigma]$ при $0 < \sigma < 1$. Будем далее обозначать эту систему Y_Λ . В случае $n = 2$ однократная полнота и неполнота, а также однократная базисность Рисса системы Y_Λ исследовалась в работах [15, 16].

3. ОДНОКРАТНАЯ ПОЛНОТА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Пусть далее выполняется условие

$$\Delta_0 \neq 0. \quad (9)$$

В силу (8) можно считать для определенности (это не умаляет общности), что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} a_n = a_{n-1} = \dots = a_{m+1} = 0, & \quad a_m \neq 0, \\ \Delta_m = \Delta_{m-1} = \dots = \Delta_{l+1} = 0, & \quad \Delta_l \neq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $2 \leq m \leq n$ и $1 \leq l \leq m$. Тогда справедливы представления

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \Delta_0 + e^{\lambda \omega_1} \Delta_1 + \dots + e^{\lambda \omega_l} \Delta_l, \quad (11)$$

$$y(x, \lambda) = a_1 \exp(\lambda \omega_1 x) + \dots + a_l \exp(\lambda \omega_l x) + a_{l+1} \exp(\lambda \omega_{l+1} x) + \dots + a_m \exp(\lambda \omega_m x), \quad (12)$$

причем $\Delta_0 \neq 0$, $\Delta_l \neq 0$, $a_m \neq 0$, $l \leq m$.

Для краткости обозначим $\delta_j = \omega_j / \omega_m$. Очевидно, $0 < \delta_l \leq 1$.

Если выполняется условие

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_l \neq 0, \quad (13)$$

то точка $\lambda = 0$ не является нулем функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$. Если же выполняется условие

$$\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_l = 0,$$

то точка $\lambda = 0$ является нулем функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$. Пусть s есть кратность этого нуля. Обозначим через $\Phi = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_s(x)\}$ максимальную линейно независимую подсистему системы функций

$$y(x, 0), \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial \lambda}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{s-1} y(x, 0)}{\partial \lambda^{s-1}}.$$

Положим $\tilde{Y}_\Lambda = Y_\Lambda \cup \Phi$. В случае выполнения условия (13) будем считать, что $\tilde{Y}_\Lambda = Y_\Lambda$.

Теорема 1. Пусть справедливы неравенства (3), выполняются условия (9)–(10) и $\sigma = \delta_l$. Тогда система $\tilde{Y}_\Lambda$ однократно полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$ в том и только том случае, если уравнение с обобщенным сдвигом

$$\frac{\overline{a_1}}{\delta_1} f\left(\frac{x}{\delta_1}\right) + \frac{\overline{a_2}}{\delta_2} f\left(\frac{x}{\delta_2}\right) + \dots + \frac{\overline{a_{m-1}}}{\delta_{m-1}} f\left(\frac{x}{\delta_{m-1}}\right) + \overline{a_m} f(x) = 0 \quad (14)$$

имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0, \sigma]$. При этом в (14) функция $f(x)$ считается продолженной нулем за отрезок $[0, \sigma]$.

Теорема 2. Пусть справедливы неравенства (3), выполняются условия (9)–(10) и $\sigma = \delta_l$. Тогда система $\tilde{Y}_\Lambda$ однократно полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$.

Следствие 1. Если выполняются предположения теоремы и $l = m$, то система функций $\tilde{Y}_\Lambda$ однократно полна в пространстве $L_2[0, 1]$.

4. ОДНОКРАТНАЯ ПОЛНОТА В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Исследуем однократную полноту в частном случае, а именно: пусть выполняется условие (9), а в условиях (10) будет $l = 1 < m$. Тогда соотношения (11)–(12) будут иметь вид

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \Delta_0 + e^{\lambda\omega_1} \Delta_1, \quad (15)$$

$$y(x, \lambda) = a_1 \exp(\lambda\omega_1 x) + a_2 \exp(\lambda\omega_2 x) + \dots + a_m \exp(\lambda\omega_m x), \quad (16)$$

причем $\Delta_0 \neq 0$, $\Delta_1 \neq 0$, $a_m \neq 0$.

Ненулевые с.з. пучка $L(\lambda)$ являются корнями уравнения

$$\Delta_0 + e^{\lambda\omega_1} \Delta_1 = 0.$$

Корни этого уравнения, очевидно, простые. Через Λ будем по-прежнему обозначать множество ненулевых с.з. В данном случае

$$\Lambda = \left\{ \lambda_k \in \mathbb{C} \mid \lambda_k = \frac{2k\pi i + d_0}{\omega_1}, \quad k \in \mathbb{Z} \right\} \setminus \{0\},$$

где $d_0 = \ln_0 c_0$ (через $\ln_0$ обозначается ветвь натурального логарифма, для которой $\ln_0 1 = 0$), $c_0 = -\Delta_0/\Delta_1$. Имеет место следующее равенство

$$e^{\lambda\omega_1} = c_0, \quad \lambda \in \Lambda. \quad (17)$$

Обозначим $\tau_\alpha = \omega_\alpha/\omega_1$, $\alpha = \overline{1, m}$. Ясно, что $1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$ и $\delta_1 = 1/\tau_m$. Из теоремы 2 следует, что система функций $\tilde{Y}_\Lambda$ является однократно полной в пространстве $L_2[0, 1/\tau_m]$ при любых значениях коэффициентов a_j в (16) ($a_m \neq 0$). Сформулируем условия однократной полноты системы Y_Λ в пространстве $L_2[0, \sigma]$ при $\sigma > 1/\tau_m$.

Определим оператор $A_\rho \in L_2[0, \rho] \rightarrow L_2[0, 1]$, действующий по формуле

$$(A_\rho f)(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^s \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in [0, \rho-s], \\ \sum_{j=0}^{s-1} \bar{c}_0^j f(x+j), & x \in (\rho-s, 1], \end{cases}$$

в случае $s < \rho \leq s+1$, где $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (если $s = 0$, то полагаем $\sum_{j=0}^{s-1} = 0$), или, более коротко,

$$(A_\rho f)(x) = \sum_{j=0}^s \bar{c}_0^j f(x+j), \quad x \in [0, 1],$$

если считать функцию $f(x)$ продолженной нулем за отрезок $[0, \rho]$.

Введем в рассмотрение операторы $B_\alpha \in L_2[0, \sigma] \rightarrow L_2[0, \sigma\tau_\alpha]$, $\alpha = \overline{1, m}$, действующие по формулам

$$(B_\alpha f)(x) = f\left(\frac{x}{\tau_\alpha}\right), \quad x \in [0, \sigma\tau_\alpha].$$

Предположим далее, что

$$a_1 \neq 0, \quad (18)$$

и обозначим $b_\alpha = a_\alpha/a_1$, $\alpha = \overline{1, m}$ ($b_1 = 1$).

Для произвольной функции $f \in L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 1/\tau_m$, рассмотрим функцию

$$F_\sigma(\lambda) = \int_0^\sigma y(x, \lambda) \overline{f(x)} dx = \alpha_1 \sum_{\alpha=1}^m b_\alpha \int_0^\sigma e^{\lambda \omega_\alpha x} \overline{f(x)} dx \quad (19)$$

при $\lambda \in \Lambda$.

В случае выполнения неравенства $k < \sigma \leq k+1$ при некотором $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ с учетом соотношения (17) при $\lambda \in \Lambda$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma e^{\lambda \omega_1 x} \overline{f(x)} dx &= \int_0^1 + \int_1^2 + \dots + \int_{k-1}^k + \int_k^\sigma = \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} \overline{f(x)} dx + \\ &+ \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} e^{\lambda \omega_1} \overline{f(x+1)} dx + \dots + \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} e^{\lambda \omega_1 (k-1)} \overline{f(x+(k-1))} dx + \\ &+ \int_0^{\sigma-k} e^{\lambda \omega_1 x} e^{\lambda \omega_1 k} \overline{f(x+k)} dx = \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} \overline{f(x)} dx + \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} c_0 \overline{f(x+1)} dx + \dots + \\ &+ \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} c_0^{k-1} \overline{f(x+(k-1))} dx + \int_0^{\sigma-k} e^{\lambda \omega_1 x} c_0^k \overline{f(x+k)} dx = \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} \overline{(A_\sigma f)(x)} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись (20), для α -го интеграла в (19) получим при $\alpha = \overline{2, m}$ и $\lambda \in \Lambda$

$$\begin{aligned} b_\alpha \int_0^\sigma e^{\lambda \omega_\alpha x} \overline{f(x)} dx &= \frac{b_\alpha}{\tau_\alpha} \int_0^{\sigma \tau_\alpha} e^{\lambda \omega_1 x} \overline{f\left(\frac{x}{\tau_\alpha}\right)} dx = \\ &= \frac{b_\alpha}{\tau_\alpha} \int_0^{\sigma \tau_\alpha} e^{\lambda \omega_1 x} \overline{(B_\alpha f)(x)} dx = \frac{b_\alpha}{\tau_\alpha} \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} \overline{(A_{\sigma \tau_\alpha} B_\alpha f)(x)} dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив (20)–(21) в (19), будем иметь при $\lambda \in \Lambda$

$$F_\sigma(\lambda) = \alpha_1 \int_0^1 e^{\lambda \omega_1 x} \sum_{\alpha=1}^m \frac{b_\alpha}{\tau_\alpha} \overline{(A_{\sigma \tau_\alpha} B_\alpha f)(x)} dx. \quad (22)$$

Если $\tilde{\Delta}(0) = \Delta_0 + \Delta_1 = 0$, то определим $F_\sigma(0)$ также формулой (22) при $\lambda = 0$. Делая соответствующие замены переменных в каждом слагаемом справа в (22) при $\lambda = 0$, можно получить

$$F_\sigma(0) = \alpha_1 \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^m \frac{b_\alpha}{\tau_\alpha} \overline{(A_{\sigma \tau_\alpha} B_\alpha f)(x)} dx = \int_0^\sigma \varphi_1(x) \overline{f(x)} dx,$$

где $\varphi_1(x) \in L_2[0, \sigma]$ есть вполне конкретная функция, которая может быть выписана. Но ввиду ее громоздкости, формула для $\varphi_1(x)$ в данной статье не приводится.

В случае $\tilde{\Delta}(0) = 0$ обозначим $\tilde{Y}_\Lambda = Y_\Lambda \cup \{\varphi_1\}$. Если же $\tilde{\Delta}(0) \neq 0$, то считаем $\tilde{Y}_\Lambda = Y_\Lambda$.

Теорема 3. Пусть справедливы неравенства (3), выполняются условия (9) и (18), а в соотношениях (10) $l = 1 < m$. Тогда система $\tilde{Y}_\Lambda$ однократно полна в пространстве $L_2[0, \sigma]$, $\sigma > 1/\tau_m$, в том и только том случае, если уравнение с обобщенным сдвигом

$$\sum_{\alpha=1}^m \frac{\bar{b}_\alpha}{\tau_\alpha} A_{\sigma \tau_\alpha} B_\alpha f = 0 \quad (23)$$

имеет только тривиальное решение в пространстве $L_2[0, \sigma]$. При этом в (23) функция $f(x)$ считается продолженной нулем за отрезок $[0, \sigma]$.

Теорема 4. Пусть справедливы неравенства (3), выполняются условия (9) и (18), а в соотношениях (10) $l = 1 < m$. Если $1/\tau_m < \sigma \leq 1$, то для однократной полноты системы $\tilde{Y}_\Lambda$ в пространстве $L_2[0, \sigma]$ достаточно выполнения условия

$$\sum_{\alpha=2}^m \frac{|b_\alpha|}{\sqrt{\tau_\alpha}} \sum_{j=1}^{k_\alpha} |c_0|^j < 1,$$

где числа $k_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha = \overline{2, m}$, таковы, что выполняются неравенства $k_\alpha < \sigma \tau_\alpha \leq k_\alpha + 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект 03-01-00169).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы*. — М.: Наука. — 1969. — 528 с.
- [2] Шкаликов А. А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семин. им. И.Г.Петровского. — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1983. — № 9. — С. 190–229.
- [3] Гасымов М. Г., Магеррамов А. М. *О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов* // Докл. АН Азерб. ССР. — 1974. — Том 30. — № 12. — С. 9–12.
- [4] Келдыш М. В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // Докл. АН СССР. — 1951. — Том 77. — № 1. — С. 11–14.
- [5] Хромов А. П. *Конечномерные возмущения вольтерровых операторов*. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск. — 1973. — 242 с.
- [6] Шкаликов А. А. *О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями* // Функци. анализ. — 1976. — Том 10. — № 4. — С. 69–80.
- [7] Eberhard W. *Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme* // Math. Z. — 1976. — Vol. 146. — N 3. — P. 213–221.
- [8] Freiling G. *Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator-büschel* // Math. Z. — 1984. — Vol. 188. — N 1. — P. 55–68.
- [9] Тихомиров С. А. *Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций*. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов. — 1987.
- [10] Вагабов А. И. *Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения*. Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Москва. — 1988. — 201 с.
- [11] Вагабов А. И. *Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов*. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та. — 1994. — 160 с.
- [12] Рыхлов В. С. *О кратной неполноте собственных функций пучков обыкновенных дифференциальных операторов* // Математика. Механика: Сб. науч. тр. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. — 2001. — Вып. 3. — С. 114–117.
- [13] Рыхлов В. С. *О кратной неполноте собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче* // Докл. РАЕН. — Саратов: Изд-во Саратов. госуд. техн. ун-та. — 2004. — № 4. — С. 72–79.
- [14] Голубь А. В., Кутепов В. А., Рыхлов В. С. *Кратная неполнота собственных функций пучков дифференциальных операторов, корни характеристического уравнения которых лежат на одном луче*. — Деп. в ВИНТИ 05.08.04, № 1353-B2004. — Саратов. — 2004. — 24 с.
- [15] Рыхлов В. С. *О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов* / Изв. вузов. Математика. — 1992. — Том 36. — № 3. — С. 35–44.
- [16] Рыхлов В. С. *О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка* // Интегральные преобразования и специальные функции. Информационный бюллетень. — М.: Научно-исследовательская группа международного журнала "Integral Transforms and Special Functions" и ВЦ РАН. — 2001. — Том 2. — № 1. — С. 85–103.

ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Разработан новый метод вычисления собственных значений λ_n и собственных функций оператора Орра – Зоммерфельда. Метод основан на представлении решения в виде комбинации разложений в степенные ряды и их сшивке. Скорость сходимости рядов исследована с помощью теории рекуррентных уравнений. Для течения Куэтта в канале численно исследовано поведение спектра при увеличении числа Рейнольдса R . Показано, что собственные значения $\lambda_n(R)$ имеют счетное множество точек ветвления второго порядка на мнимой оси.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оператор Орра – Зоммерфельда возникает при исследовании течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале [1] – [4]. Обозначая продольную координату канала через $x \in (-\infty, \infty)$, поперечную – через $y \in [-1, 1]$, а время – через $t > 0$, малые возмущения функции тока $\Psi(x, y, t)$ относительно основного стационарного течения с горизонтальной скоростью $U = U(y)$ представляют в виде бегущей волны $\Psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{i\alpha(x - \lambda t)}$, где $\alpha > 0$ – заданное волновое число, а $\varphi(y)$ и λ – искомые амплитуда и скорость.

При этом уравнения Навье – Стокса с условиями прилипания жидкости на границах канала сводятся к линейному уравнению Орра – Зоммерфельда четвертого порядка для функции $\varphi(y)$:

$$\frac{1}{i\alpha R} \left(\varphi^{(IV)} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi \right) - (U - \lambda) \left(\varphi'' - \alpha^2 \varphi \right) + U'' \varphi = 0, \quad (1.1)$$

с однородными краевыми условиями

$$\varphi(-1) = \varphi'(-1) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi'(1) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь i – мнимая единица, а R – число Рейнольдса; для практики наиболее интересными являются случаи больших $R \gg 1$.

Оператор, соответствующий уравнению (1.1), является несамосопряженным и содержащим малый коэффициент $(\alpha R)^{-1}$ при старшей производной.

Спектром задачи является счетное множество комплексных собственных значений (далее – СЗ) λ_n , каждому λ_n соответствует (с точностью до множителя) собственная комплекснозначная функция $\varphi_n(y)$.

Глубокие теоретические результаты по асимптотическому при $R \rightarrow \infty$ поведению спектра задачи (1.1), (1.2) получены в [5] – [8].

Для численного решения задачи (1.1), (1.2) используются неравномерные разностные сетки [9], разложения по многочленам Чебышева [10], метод расщепления оператора задачи [11], [12] и другие подходы [13]. Однако, в силу несамосопряженности оператора задачи и наличия малого коэффициента при старшей производной, разработка эффективного метода решения и исследование спектра задачи при числах $R \gg 1$ остается по-прежнему актуальной задачей.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для основного стационарного течения $U(y)$ рассматривают три случая.

I. Течение Куэтта $U(y) = y$, когда стенки канала движутся в противоположные стороны с одинаковой скоростью.

II. Течение Пуазейля $U(y) = 1 - y^2$, когда стенки покоятся, а на торцах канала имеется перепад давления, вызывающий движение жидкости.

III. Общее течение Куэтта – Пуазейля со скоростью $U(y) = ay^2 + by + c$.

Построим метод решения задачи (1.1), (1.2) в общем случае III.

Легко убеждаемся, что любое решение $\varphi = \varphi(\alpha, R, \lambda; y)$ уравнения (1.1) является регулярной функцией в любой конечной точке $y_0 \in \mathcal{C}$, а особой будет лишь бесконечноудаленная точка $y = \infty$. Решение $\varphi(y)$ задачи (1.1), (1.2) будем искать в виде разложений по степеням $(1+y)^k$ и $(1-y)^k$, что позволит точно удовлетворить краевым условиям (1.2).

2.1. Окрестность точки $y = -1$. Представим решение $\varphi(\alpha, R, \lambda; y)$ уравнения (1.1) в окрестности граничной точки $y = -1$ в виде, учитывающем первые два краевых условия (1.2):

$$\varphi(\alpha, R, \lambda; y) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (y+1)^{k+2}, \quad (2.1)$$

с коэффициентами $d_k = d_k(\alpha, R, \lambda)$. Как будет показано далее, разложение (2.1) сходится в любой конечной точке $y \in \mathcal{C}$.

Дифференцируя ряд (2.1) четыре раза, записывая функцию $U(y)$ в виде трехчлена по степеням $(y+1)^k$ и подставляя эти разложения в уравнение (1.1), получаем для коэффициентов d_k линейное однородное рекуррентное уравнение порядка 6:

$$\begin{aligned} d_k = & \frac{-ia\alpha^3 R}{(k+2)k(k^2-1)} d_{k-6} + \frac{i\alpha^3 R(2a-b)}{(k+2)k(k^2-1)} d_{k-5} + \\ & + \frac{i\alpha R[a(k-4)(k-1) - \alpha^2(a+c-b-\lambda)] - \alpha^4}{(k+2)k(k^2-1)} d_{k-4} + \\ & + \frac{i\alpha R(k-2)(b-2a)}{(k+2)(k+1)k} d_{k-3} + \frac{i\alpha R(a+c-b-\lambda) + 2\alpha^2}{(k+1)(k+2)} d_{k-2}, \quad k \geq 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Выбирая различные значения d_0 и d_1 и используя (2.2) (с учетом $d_k = 0$ при $k < 0$), будем получать различные наборы коэффициентов d_k .

Теперь построим два линейно-независимых решения $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ уравнения (1.1), удовлетворяющих первым двум условиям (1.2). Используем (2.1), (2.2), а начальные коэффициенты d_0 и d_1 для рекурсии выберем двумя независимыми способами:

$$d_0^{(1)} = 1, \quad d_1^{(1)} = 0; \quad d_0^{(2)} = 0, \quad d_1^{(2)} = 1.$$

Отметим здесь, что указанные два выбора коэффициентов d_0 и d_1 соответствуют двум различным задачам Коши в точке $y = -1$.

Для уравнения (1.1) запишем общий вид решения, удовлетворяющего лишь первым двум краевым условиям (1.2):

$$\varphi(y) = p_1 \varphi_1(y) + p_2 \varphi_2(y), \quad (2.3)$$

где p_1 и p_2 – произвольные постоянные. Далее покажем, как в задаче на собственные значения находятся эти константы.

2.2. Окрестность точки $y = 1$. Построим аналогичное (2.1) представление решения уравнения (1.1) со вторыми двумя краевыми условиями (1.2):

$$\varphi(\alpha, R, \lambda; y) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k (1-y)^{k+2}, \quad (2.4)$$

где $e_k = e_k(\alpha, R, \lambda)$. Как будет показано далее, разложение (2.4) сходится для любой конечной точки $y \in \mathcal{C}$.

Для коэффициентов e_k получим рекуррентное уравнение, аналогичное (2.2); его единственное отличие от (2.2) состоит в изменении знака перед параметром b в коэффициентах уравнения.

Аналогично предыдущему построим для уравнения (1.1) два линейно-независимых решения $\varphi_3(y)$ и $\varphi_4(y)$, удовлетворяющих вторым двум условиям (1.2). Для этого начальные коэффициенты e_0 и e_1 для рекурсии выберем двумя независимыми способами:

$$e_0^{(1)} = 1, \quad e_1^{(1)} = 0; \quad e_0^{(2)} = 0, \quad e_1^{(2)} = 1.$$

Отметим здесь, что указанные два выбора коэффициентов e_0 и e_1 соответствуют двум различным задачам Коши в точке $y = 1$.

Для уравнения (1.1) имеем общий вид решения, удовлетворяющего лишь вторым двум краевым условиям (1.2):

$$\varphi(y) = p_3 \varphi_3(y) + p_4 \varphi_4(y), \quad (2.5)$$

где p_3 и p_4 – произвольные постоянные. При решении задачи на собственные значения эти константы будут найдены.

2.3. Сшивка решений. Общие решения (2.3) и (2.5) необходимо гладко сшить в некоторой точке y_* , что позволит удовлетворить всем граничным условиям (1.2). Для этого достаточно, чтобы в точке y_* совпали решения (2.3) и (2.5) и их производные до 3-го порядка включительно.

Запишем четыре уравнения сшивки для $m = 0, 1, 2, 3$:

$$p_1 \varphi_1^{(m)}(y_*) + p_2 \varphi_2^{(m)}(y_*) = p_3 \varphi_3^{(m)}(y_*) + p_4 \varphi_4^{(m)}(y_*). \quad (2.6)$$

Введем вектор $\vec{z}$ с компонентами $z_1 = p_1$, $z_2 = p_2$, $z_3 = -p_3$, $z_4 = -p_4$ и перепишем систему (2.6) в векторном виде:

$$A \vec{z} = \vec{0}, \quad (2.7)$$

где матрица A есть

$$A = \begin{vmatrix} \varphi_1(y_*) & \varphi_2(y_*) & \varphi_3(y_*) & \varphi_4(y_*) \\ \varphi_1'(y_*) & \varphi_2'(y_*) & \varphi_3'(y_*) & \varphi_4'(y_*) \\ \varphi_1''(y_*) & \varphi_2''(y_*) & \varphi_3''(y_*) & \varphi_4''(y_*) \\ \varphi_1'''(y_*) & \varphi_2'''(y_*) & \varphi_3'''(y_*) & \varphi_4'''(y_*) \end{vmatrix}.$$

Для нахождения нетривиального решения системы (2.7) необходимо выполнение условия

$$\det(A) = 0,$$

которое эквивалентно равенству нулю вронскиана $\text{Wr}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; y_*)$:

$$\text{Wr}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4; y_*) = 0. \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) является основным для нахождения искомых собственных значений λ_n . Оно решалось численно с помощью итерационного метода Ньютона, а необходимая при этом производная $\partial \text{Wr} / \partial \lambda$ находилась явно с помощью дифференцирования разложений (2.1) и (2.4) по спектральному параметру λ . При этом производные коэффициентов $\partial d_k / \partial \lambda$ вычислялись из рекуррентного уравнения, получаемого дифференцированием соотношения (2.2) по λ . Аналогичный подход позволяет вычислить производные $\partial e_k / \partial \lambda$.

Определив собственное значение λ_n , найдем коэффициенты p_k представлений (2.3), (2.5) решения исходной задачи (1.1), (1.2). Собственную функцию $\varphi_n(\alpha, R, \lambda; y)$ определим, положив $p_4 = 1$ в представлении (2.5), а остальные коэффициенты p_1, p_2, p_3 найдем из любых трех уравнений системы (2.6).

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рекуррентное уравнение (2.2) имеет шестой порядок и может быть исследовано с помощью теории Паункаре – Перрона – Биркгофа линейных разностных уравнений [14]. Запишем асимптотику при $k \rightarrow \infty$ его шести независимых решений $d_k^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, 6$; при этом более удобной для нас является асимптотика отношений $d_k^{(m)} / d_{k-1}^{(m)}$.

Получаем, что первые четыре решения имеют один характер асимптотики, а последние два – другой:

$$\frac{d_k^{(m)}}{d_{k-1}^{(m)}} = \frac{C_1^{(m)}}{\sqrt{k}} + \frac{C_2^{(m)}}{k} + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (3.1)$$

$$\frac{d_k^{(m)}}{d_{k-1}^{(m)}} = \frac{D_1^{(m)}}{k} + \frac{D_2^{(m)}}{k^2} + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad m = 5, 6. \quad (3.2)$$

Приведем значения лишь первых коэффициентов C_1 и D_1 :

$$C_1^{(m)} = (i\alpha Ra)^{1/4}, \quad D_1^{(m)} = \pm \alpha, \quad a \neq 0. \quad (3.3)$$

Четыре ветви корня в равенстве (3.3) задают четыре различных решения для $C_1^{(m)}$ и последующих коэффициентов $C_n^{(m)}$, а два независимых решения $D_1^{(m)}$ и последующих коэффициентов $D_n^{(m)}$ определяются выбором знака $\pm$.

В случае $a = 0$ уравнение (2.2) имеет пятый порядок, асимптотика его пяти независимых решений исследуется аналогично. Получаем, что последние два решения не изменяют характера асимптотики (3.2), а первые три решения, в отличие от (3.1), имеют новый характер:

$$\frac{d_k^{(m)}}{d_{k-1}^{(m)}} = \frac{C_1^{(m)}}{k^{2/3}} + \frac{C_2^{(m)}}{k^{4/3}} + \dots, \quad k \rightarrow \infty, \quad m = 1, 2, 3, \quad (3.4)$$

где

$$C_1^{(m)} = (i\alpha Rb)^{1/3}, \quad C_2^{(m)} = -\frac{\alpha^2}{3C_1^{(m)}}. \quad (3.5)$$

Коэффициенты e_k имеют асимптотическое поведение, аналогичное (3.1)–(3.5).

Из полученных результатов поведения коэффициентов d_k и e_k разложений (2.1) и (2.4), согласно признаку Даламбера сходимости рядов следует, что эти разложения сходятся для любой конечной точки $y \in \mathcal{C}$.

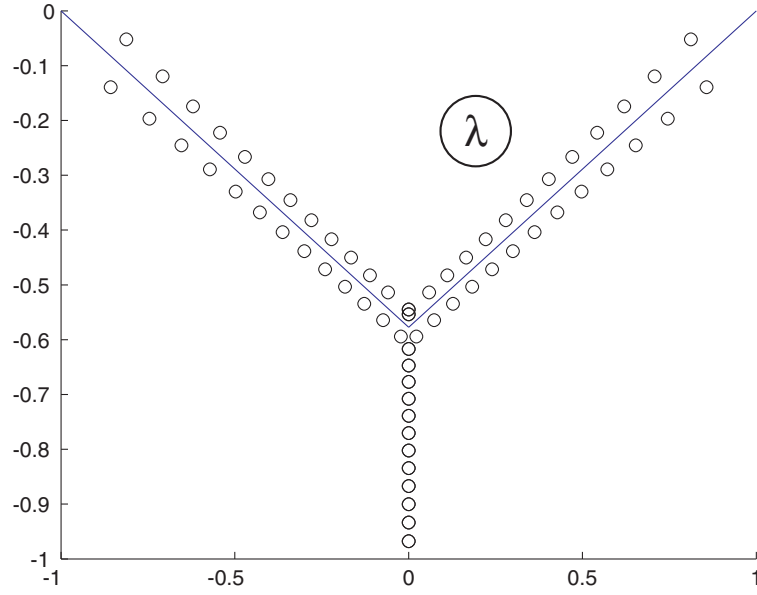
4. СПЕКТР ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Разработанный метод показал очень высокую эффективность вплоть до значений $R = 10^5$ и выше. Были перевычислены с точностью до 100 десятичных значащих цифр и сравнены результаты для всех СЗ, имеющихся в литературе. Это показало, что часто точность приведенных данных оказывается весьма невысокой, а в некоторых случаях (см. [10]) даже обнаружен пропуск СЗ.

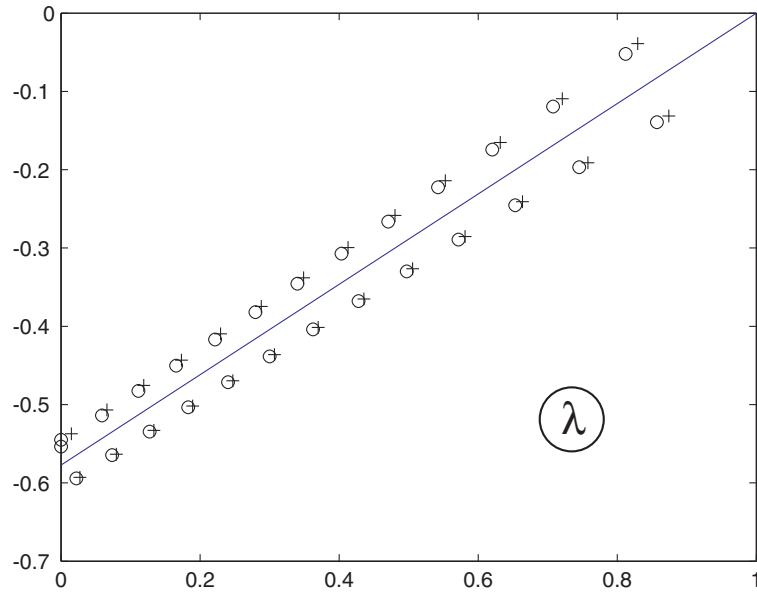
Особо детально был исследован спектр задачи для течения Куэтта с потоком $U(y) = y$. Легко показать, что в этом случае спектр обладает симметрией относительно мнимой оси: если точка λ_0 является точкой спектра, то и $\lambda_1 = -\lambda_0^*$ также есть точка спектра.

Как показано в [6] – [8] (см. также ссылки в этих работах), при больших числах R весь спектр λ_n расположен на нескольких ветвях в полуполосе $\{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda) \in (-1, 1), \operatorname{Im}(\lambda) < 0\}$. Две ветви расположены сверху и снизу от отрезка $\mathcal{L}_1$, соединяющего две точки комплексной плоскости λ с координатами $\lambda = -i/\sqrt{3}$ и $\lambda = 1$; на этих ветвях содержится конечное число точек спектра. Третья и четвертая ветви расположены сверху и снизу от отрезка $\mathcal{L}_2$, симметричного $\mathcal{L}_1$ относительно мнимой оси. Последняя ветвь включает чисто мнимые собственные значения на луче $\{\lambda : \operatorname{Re}(\lambda) = 0, \operatorname{Im}(\lambda) < -1/\sqrt{3}\}$, их счетное множество с предельной точкой $\lambda = -i\infty$.

На Рис. 1 вычислен спектр задачи для значений параметров $\alpha = 1$, $R = 10^4$; на мнимой оси здесь показаны СЗ с $\operatorname{Im}(\lambda) > -1$, сплошной линией отмечены отрезки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Над точкой $-i/\sqrt{3}$ здесь видны два близких СЗ $\lambda = -0.545i$ и $\lambda = -0.554i$. Эту картину называют "спектральный галстук", детальному исследованию этого портрета при больших числах Рейнольдса R посвящены работы [6] – [8]. В

Рис. 1. Спектр для случая $\alpha = 1$, $R = 10^4$.

частности, в [7], [8] выведены асимптотические при $R \rightarrow \infty$ формулы для координат СЗ на всех пяти ветвях. Из этих результатов следует, что первые четыре ветви стремятся к своему предельному положению – отмеченным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, а расстояние до этих отрезков имеет асимптотику $\sim \log(R)/\sqrt{R}$.

Рис. 2. Точные СЗ (o) и асимптотики (+), полученные в [7], [8]; полуплоскость $\text{Re}(\lambda) > 0$, параметры $\alpha = 1$, $R = 10^4$.

На Рис. 2 дано сравнение в окрестности отрезка $\mathcal{L}_1$ точных СЗ (отмечены "o") и асимптотик из [7], [8] (отмечены "+") для $\alpha = 1$, $R = 10^4$. Видна высокая точность

результатов [7], [8], причем при увеличении числа R эта точность становится еще выше.

Однако в окрестности точки пересечения ветвей, то есть точки $\lambda = -i/\sqrt{3}$, формулы из [7], [8] перестают работать и здесь необходим детальный численный анализ спектра. Как будет показано далее, именно здесь при увеличении числа R происходит переход точек спектра с нижней ветви на четыре первых ветви. Далее приведем результаты расчета спектра $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ при фиксированном значении волнового числа $\alpha = 1$ и увеличении числа $R > 0$. Значения λ_n будем рассматривать как функции числа R , то есть $\lambda_n = \lambda_n(R)$.

При малых значениях R весь спектр λ_n лежит на мнимой отрицательной оси.

Приведем первые 4 значения λ_n для числа $R = 1$: $\lambda_1 = -9.31481i$, $\lambda_2 = -20.57596i$, $\lambda_3 = -38.94677i$, $\lambda_4 = -60.05523i$.

При увеличении числа R до величины $R = 49$ все значения λ_n непрерывно приближаются к началу координат. Дадим первые 4 значения λ_n при $R = 49$: $\lambda_1 = -0.28817i$, $\lambda_2 = -0.66644i$, $\lambda_3 = -0.75028i$, $\lambda_4 = -1.18513i$.

При дальнейшем увеличении числа $R > 49$ значение $\lambda_1(R)$ останавливается при $R_a = 49.0570$, достигая величины $\lambda_1(R_a) = -0.288165i$, а затем удаляется от начала координат, медленно приближаясь к значению $\lambda_2(R)$.

Параллельно этому процессу при числе $R = R_b = 54.93702$ значение λ_3 также останавливается, достигая величины $\lambda_3(R_b) = -0.715297i$, а затем удаляется от начала координат, приближаясь к значению $\lambda_4(R)$. При числе $R = R_1 = 61.917759$ значения $\lambda_3(R)$ и $\lambda_4(R)$ сталкиваются, образуя первое двойное собственное значение

$$\lambda_3(R_1) = \lambda_4(R_1) = -0.799834979i. \quad (4.1)$$

При дальнейшем увеличении $R > R_1$ это двойное СЗ распадается на два простых, движущихся в комплексной плоскости симметрично относительно мнимой оси и удаляющихся от нее. Можно показать, что для чисел R в окрестности точки $R = R_1$ два СЗ $\lambda_3(R)$ и $\lambda_4(R)$ имеют поведение

$$\lambda_{3,4}(R) = \lambda_* \pm C\sqrt{R - R_1} + O(R - R_1), \quad R \rightarrow R_1, \quad (4.2)$$

где λ_* – значение из (4.1), а $C > 0$ – некоторая константа. Отсюда видно, что функции $\lambda_3(R)$ и $\lambda_4(R)$ имеют при $R = R_1$ точку ветвления второго порядка.

Аналогичное поведение имеет пара $\lambda_1(R)$ и $\lambda_2(R)$ при дальнейшем увеличении числа R . При $R_2 = 65.520229065$ значения $\lambda_1(R)$ и $\lambda_2(R)$ сталкиваются, образуя второе двойное СЗ

$$\lambda_1(R_2) = \lambda_2(R_2) = -0.388160962i, \quad (4.3)$$

которое при дальнейшем увеличении $R > R_2$ также распадается на два простых, симметричных относительно мнимой оси. Точка $R = R_2$ при этом также является точкой ветвления второго порядка для функций $\lambda_1(R)$ и $\lambda_2(R)$.

Траектории СЗ $\lambda_1(R)$, $\lambda_2(R)$ и $\lambda_3(R)$, $\lambda_4(R)$ при увеличении числа $R \in [24, 10^4]$ показаны на Рис. 3. Для наглядности движение СЗ вверх и вниз по мнимой оси здесь представлено в виде двух близких параллельных путей. Точка A соответствует первому двойному СЗ (4.1), точка B – второму двойному СЗ (4.3). Пунктиром показаны отрезки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. На Рис. 3 видно, как с увеличением R значения $\lambda_1(R)$ и $\lambda_2(R)$ приближаются к этим отрезкам сверху, а значения $\lambda_3(R)$ и $\lambda_4(R)$ – снизу.

Последующие СЗ $\lambda_n(R)$ с номерами $n > 4$ при увеличении R ведут себя более сложным образом и их надо рассматривать четверками.

Значение $\lambda_5(R)$ ведет себя аналогично поведению $\lambda_1(R)$ – сначала оно приближается к началу координат по мнимой оси, затем останавливается при $R_c = 224.300$, потом удаляется от начала координат. Дальнейшую его динамику опишем позже.

Следующее два значения $\lambda_6(R)$ и $\lambda_7(R)$ вначале ведут себя аналогично поведению $\lambda_1(R)$ и $\lambda_2(R)$ – значение $\lambda_6(R)$ приближается к началу координат, затем останавливается, потом движется навстречу $\lambda_7(R)$ и образует третье двойное СЗ

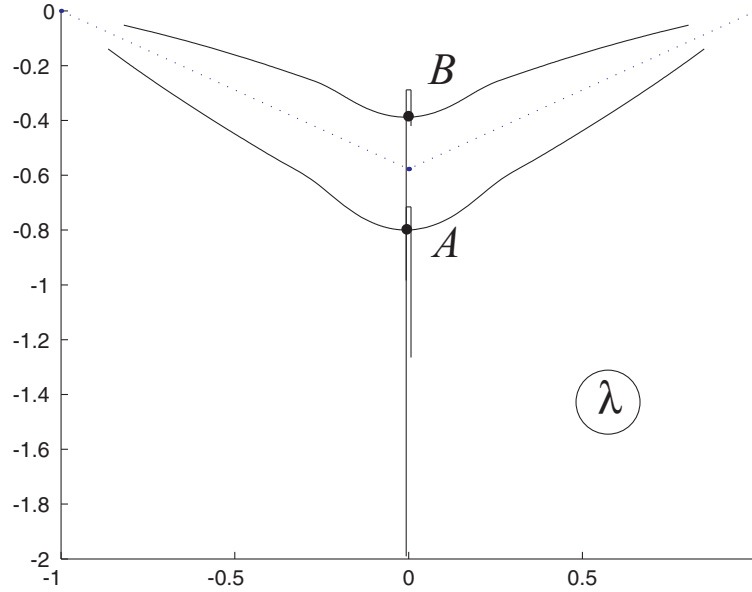


Рис. 3. Траектории СЗ $\lambda_1(R)$, $\lambda_2(R)$ и $\lambda_3(R)$, $\lambda_4(R)$ при увеличении числа $R \in [24, 10^4]$.

при $R = R_3 = 205.77778$:

$$\lambda_6(R_3) = \lambda_7(R_3) = -0.665270088 i. \quad (4.4)$$

При числе $R > R_3$ это двойное СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся симметрично в комплексной плоскости, сначала удаляясь от мнимой оси на расстояние порядка 0.01, а затем приближаясь к ней. При $R = R_4 = 214.4033833$ эти два простых СЗ опять сталкиваются на мнимой оси и опять образуют следующее, четвертое, двойное СЗ:

$$\lambda_6(R_4) = \lambda_7(R_4) = -0.647397672 i. \quad (4.5)$$

На Рис. 4 показаны траектории значений $\lambda_6(R)$ и $\lambda_7(R)$ при увеличении $R \in [172, 230]$. Точка A здесь соответствует двойному СЗ (4.4), точка B – двойному СЗ (4.5).

При дальнейшем увеличении числа $R > R_4$ это четвертое двойное СЗ распадается на два простых СЗ, движущихся в разные стороны по мнимой оси. Далее одно из этих СЗ, движущихся от начала координат, при числе $R = R_5 = 233.273196$ сталкивается со значением $\lambda_8(R)$ и образует пятое двойное СЗ:

$$\lambda_8(R_5) = \lambda_{(6,7)}(R_5) = -0.705749592 i. \quad (4.6)$$

Здесь необходимо отметить, что после распада двойного СЗ на два простых, мы не можем однозначно приписать номер каждому простому СЗ – необходимо некоторое правило их нумерации. Поэтому в (4.6) у второго СЗ использован индекс (6, 7), показывающий, что только одно из исходных значений $\lambda_6(R)$ и $\lambda_7(R)$ участвует в образовании двойного СЗ (4.6).

При дальнейшем увеличении числа $R > R_5$ двойное СЗ (4.6) распадается на два простых значения, движущихся симметрично в комплексной плоскости и приближающихся к предельным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ снизу. Траектории этих СЗ аналогичны нижним "усам" на Рис. 3.

Одновременно с описанным последним процессом, при увеличении числа $R > R_4$, как было сказано ранее, четвертое двойное СЗ (4.5) распадается на два простых

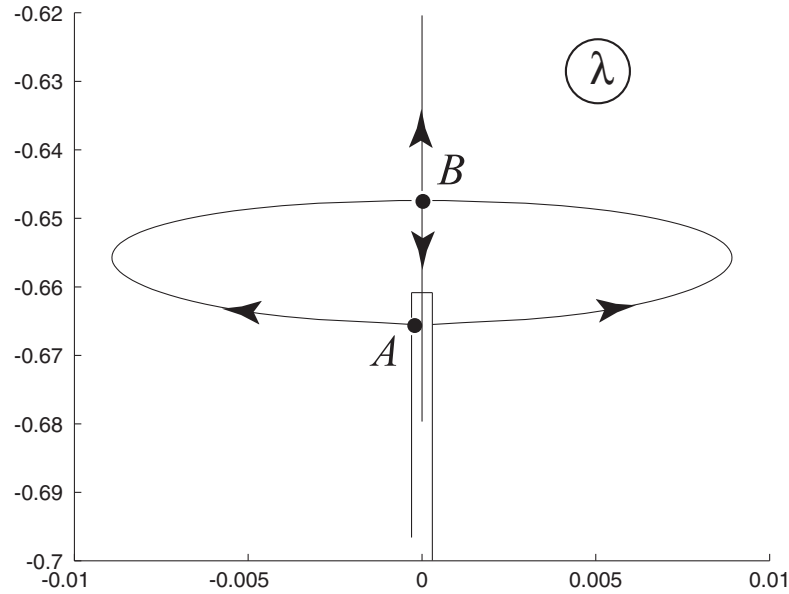


Рис. 4. Траектории СЗ $\lambda_6(R)$ и $\lambda_7(R)$ при увеличении числа $R \in [172, 230]$.

чисто мнимых значения. Одно из этих СЗ $\lambda_{(6,7)}$ движется к началу координат и при числе $R = R_6 = 253.42383$ сталкивается со значением $\lambda_5(R)$, образуя шестое двойное СЗ:

$$\lambda_5(R_6) = \lambda_{(6,7)}(R_6) = -0.458236635i. \quad (4.7)$$

При дальнейшем увеличении числа $R > R_6$ двойное СЗ (4.7) распадается на два простых значения, движущихся симметрично в комплексной плоскости и приближающихся к предельным отрезкам $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ сверху. Траектории этих СЗ аналогичны верхним "усам" на Рис. 3.

На этом заканчивается описание траекторий четверки СЗ с номерами $n = 5, 6, 7, 8$; при этом ясна взаимосвязь этого "квартета" СЗ.

При дальнейшем увеличении числа R все последующие СЗ ведут себя аналогично этой четверке. Сначала два СЗ $\lambda_{4m+2}(R)$ и $\lambda_{4m+3}(R)$ сталкиваются на мнимой оси, образуя новое двойное СЗ, затем оно распадается на два простых СЗ, движущихся симметрично в комплексной плоскости по дугам, аналогичным на Рис. 4. Далее эти СЗ опять сталкиваются на мнимой оси, образуя следующее двойное СЗ, которое затем распадается на два простых чисто мнимых СЗ. Далее одно из этих СЗ сталкивается с СЗ $\lambda_{4m+4}(R)$, образует следующее двойное СЗ, которое затем распадается на два простых симметричных СЗ, движущихся в плоскости и приближающихся при $R \rightarrow \infty$ к предельным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ снизу.

Далее второе СЗ из пары с номерами $4m + 2$ и $4m + 3$ сталкивается с СЗ $\lambda_{4m+1}(R)$, образуя новое двойное СЗ; затем оно распадается на два симметричных простых СЗ, приближающихся при $R \rightarrow \infty$ к предельным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ сверху.

Отличие в поведении каждой следующей четверки состоит в том, что новые двойные СЗ расположены все ближе к предельной точке $\lambda_* = -i/\sqrt{3}$, а траектории между двумя двойными СЗ, аналогичные на Рис. 4, все сильнее прижимаются к мнимой оси.

Подобная картина образования и распада двойных СЗ имеет место при изменении волнового числа α .

Проведенный численный анализ позволяет сделать вывод, что при фиксированном $\alpha > 0$ СЗ задачи (1.1), (1.2) для течения Куэтта, рассматриваемые как функции числа Рейнольдса R , имеют при $R > 0$ счетное множество точек ветвления второго порядка R_k , в окрестности которых два СЗ ведут себя аналогично (4.2).

Отметим также, что с необходимостью вычисления аналогичных точек ветвления собственных значений волнового сфероидального уравнения мы столкнулись в [15].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 04-01-00723, 04-01-00773) и при поддержке Программы $N^\circ 3$ фундаментальных исследований ОМН РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Drazin R.G., Reid W.H.* Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press, 1981.
- [2] *Жук В.И.* Волны Толлмина – Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001.
- [3] *Дразин Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005.
- [4] *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.: 2006.
- [5] *Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S.* Pseudospectra of the Orr – Sommerfeld operator // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. $N^\circ 1$. P. 15-47.
- [6] *Нейман-заде М.И., Шкаликот А.А.* О вычислении собственных значений задачи Орра – Зоммерфельда // Фундам. и прикл. матем. 2002. Т. 8. Вып. 1. С. 301-305.
- [7] *Dyachenko A.V., Shkalikov A.A.* On the Orr – Sommerfeld equation with linear profile. arXiv:math.FA/0212127 v3 18 Dec. 2002.
- [8] *Шкаликот А.А.* Спектральные портреты оператора Орра – Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Соврем. матем. Фундам. направл. 2003. Т. 3. С. 89-112.
- [9] *Жарилкасинов А., Лисейкин В.Д., Скобелев Б.Ю., Яненко Н.Н.* Применение неравномерной сетки для численного решения задачи Орра – Зоммерфельда // Числен. методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1983. Т. 14. $N^\circ 5$. С. 45-54.
- [10] *Orszag S.A.* Accurate solution of the Orr – Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. Part 4. P. 689-703.
- [11] *Альварес Л.М., Диткин В.В.* О численном решении уравнения Орра – Зоммерфельда // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. $N^\circ 4$. С. 611-615.
- [12] *Абрамов А.А., Ульянова В.И.* Об одном методе решения уравнения типа бигармонического с сингулярно входящим малым параметром // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. $N^\circ 4$. С. 567-575.
- [13] *Дубровский В.В., Кадченко С.И., Кравченко В.Ф., Садовничий В.А.* Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 378. $N^\circ 4$. С. 443-446.
- [14] *Wimp J., Zeilberger D.* Resurrecting the asymptotics of linear recurrences // J. Mathem. Anal. and Appl. 1985. V. 111. P. 162-176.
- [15] *Скороходов С.Л., Христофоров Д.В.* Вычисление точек ветвления собственных значений, соответствующих волновым сфероидальным функциям // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 2006. Т. 46. $N^\circ 7$. С. 1195-1210.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМ-ЛИУВИЛЛЯ

Прямая задача Штурм-Лиувилля (Ш-Л)

$$\begin{aligned} y'' - q(x)y &= -\lambda y, \\ y(0) &= y(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

хорошо изучена. Для нахождения собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) имеются стандартные программы.

Обратная задача состоит в определении потенциала по конечному набору собственных значений, известных с ошибкой. Известно [1], что для нахождения потенциала надо иметь два спектра, соответствующих двум различным парам краевых условий. Однако, если потенциал симметричен относительно середины отрезка $[0, \pi]$, то обратная задача с краевыми условиями Дирихле имеет единственное решение. Ясно, что зашумленному спектру соответствует бесконечное число потенциалов, с чем и связана некорректность задачи.

В настоящей статье предполагается при построении алгоритма решения обратной задачи (Ш-Л) применить метод регуляризации А. Н. Тихонова [2]. Обзор работ, содержащих реконструирование потенциала при некоторых дополнительных предположениях, содержится в [3].

Предлагаемый метод опирается на введение вспомогательного потенциала $Q(x)$ в задаче

$$\begin{aligned} v'' - Q(x)v &= -\mu v, \\ v(0) &= v(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Умножая (1) на $v(x)$ и (2) на $y(x)$, а затем вычитая одно из другого, получим интегральное тождество:

$$\int_0^\pi (q(x) - Q(x) + \lambda - \mu) v y \, dx = 0. \quad (3)$$

Возводя в квадрат и суммируя тождества (3) для каждого i , получим:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi (q(x) - Q(x) + \lambda_i - \mu_i) v_i y_i \, dx \right)^2 = 0. \quad (4)$$

Если известны N собственных значений, а $\tilde{q}$ — пробный потенциал или приближение к искомому потенциалу $q(x)$, то Φ в 0 не обращается.

Принимая во внимание асимптотику собственных значений потенциала $q(x)$

$$\lambda_i = i^2 + (1/\pi) \int_0^\pi q(x) \, dx + a_i(q) \quad \{a_i(q)\}_{i=1}^\infty \in l^2,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi \left(\tilde{q}(x) - Q(x) + 1/\pi \int_0^\pi (q - Q) \, dx + a_i(q) \right) v_i \tilde{y}_i \, dx \right)^2 < \infty,$$

где $\tilde{y}_i$ — СФ пробного потенциала $\tilde{q}$.

Обратная задача Ш–Л (1) формулируется как задача минимизации: найти суммируемый потенциал $\tilde{q}(x) \in L^2[0, \pi]$ такой, что сглаживающий функционал

$$\Phi(\tilde{q}) = \sum_{i=1}^N \left(\int_0^\pi (\tilde{q}(x) - Q(x) + \lambda_i - \mu_i) v_i(x) \tilde{y}_i(x) dx \right)^2 + \alpha \Omega[\tilde{q}(x)] \quad (5)$$

достигает глобального минимума, если $\lambda_i, \mu_i, Q, u_i, \tilde{y}_i$ известны.

Замечание 5. Функционал $\Phi(\tilde{q})$ может иметь локальные минимумы при $\alpha = 0$.

Это утверждение следует из априорной информации о неединственности решений некорректной обратной задачи Ш–Л для конечного набора СЗ.

Замечание 6. Потенциал $Q(x)$ следует выбирать так, чтобы СЗ $\{\mu_i\}_{i=1}^N$ были в малой окрестности СЗ $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$. Тогда значение $\Phi(\tilde{q})$ будет приближаться к нулю. Таким образом, среди всех возможных потенциалов $Q(x)$ надо выбрать тот, который приводит к наименьшему значению Φ .

Введение стабилизатора $\Omega[x]$, согласно А.Н. Тихонову, приводит к единственности решения вариационной задачи. В данной задаче был выбран стабилизатор $\Omega[x] = \int_0^\pi q^2(x) dx$, $\alpha = 10^{-5} \div 10^{-7}$. Параметр α подбирался в диапазоне ожидаемой среднеквадратичной погрешности решения. Если набора СЗ недостаточно для восстановления потенциала, необходимо было увеличивать значение параметра регуляризации α , иначе итерации переставали сходиться. Но тогда искажается ожидаемое решение и "точный потенциал" заменяется реально достижимым.

Рассмотрим важный вопрос о вычислении СФ. В работе [4] задача на СЗ решалась в фазовых переменных: $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ подчинялись соотношениям

$$\begin{aligned} y(x) &= \rho(x) \sin \varphi(x), \\ y'(x) &= \rho(x) \cos \varphi(x) = 0, \quad \rho(x) > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1), получим две задачи для фазовых переменных:

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \cos^2 \varphi(x) + (\lambda - q(x)) \sin^2 \varphi(x), \\ \varphi(0) = 0, \quad \varphi(\pi) = \pi i, \quad i = 1, 2, \dots; \\ \rho(x) = \rho(x)(1 + q(x) - \lambda) \sin \varphi(x) \cos \varphi(x), \\ \rho(0) = C. \end{cases} \quad (7)$$

с точностью до нормировочного множителя C . Так как $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ известны, $q(x)$ представляется приближающей функцией (интерполянт) $\tilde{q}$, условие $\varphi(\pi) = \pi i$, $i = 1, 2, \dots$ задачи (7) может не выполняться из-за неортогональности вычисляемых СФ. Однако возможно дополнительно скорректировать коэффициенты интерполанта, решая задачу минимизации функционала

$$W(\tilde{q}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \left(\int_0^\pi y_i y_j dx \right)^2. \quad (8)$$

Расчеты показали быструю сходимость метода восстановления потенциала, не прибегая к минимизации функционала (8). Значение $W(q)$ использовалось для контроля ортогональности приближенных СФ.

Пошаговая схема алгоритма состоит в следующем:

- (1) Положим пробный потенциал $\tilde{q}^0 = 0$ (если нет априорной информации о функциональной зависимости искомого потенциала).
- (2) Вычисляем СФ $y_i^0(\tilde{q}^0)$ по формулам (7), используя набор СЗ $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$. Константу C выбираем из условий нормировки $\|y_i\| = 1$, $i = 1 \dots N$.

- (3) Представим потенциал $\tilde{q}^1$ интерполяционным полиномом или рациональной интерполяцией с неизвестными коэффициентами. Минимизируем функционал $\Phi(\tilde{q}^1)$ (5). Получаем коэффициенты полиномов в $\tilde{q}^1$.
- (4) Возвращаемся на этап 2. Вычисляем $y_i^1(\tilde{q}^1)$.
- (5) Проверяем ортогональность СФ $y_i^1(\tilde{q}^1)$ по формуле (8). Минимизируем $W(\tilde{q}^1)$ (8) и получаем подправленные коэффициенты в $\tilde{q}^1$.
- (6) Минимизируем функционал $\Phi(\tilde{q}^1)$ и получаем новые значения коэффициентов интерполяции. Обозначим исправленный потенциал $\tilde{q}^2$. Возвращаемся на этап 2 и так далее, пока коэффициенты интерполяционных полиномов не будут меняться в пределах заданной погрешности.

Восстановление осциллирующего потенциала

В обратных физических задачах со слоистой средой возникает трудная проблема реконструкции быстроосциллирующего потенциала. Рассмотрим модельный пример потенциала $q(x) = \cos(4x)$. СЗ вычисляются из трансцендентного алгебраического уравнения для СФ Матье

$$\begin{aligned} \text{MathieuC}[\lambda/4, 1/8, 0] \text{ MathieuS}[\lambda/4, 1/8, 2\pi] &= \\ \text{MathieuS}[\lambda/4, 1/8, 0] \text{ MathieuC}[\lambda/4, 1/8, 2\pi] &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что первые девять приближенных СЗ потенциала $q(x) = \cos(4x)$ известны с точностью 10^{-5} :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.95849, & \lambda_2 &= 3.49231, & \lambda_3 &= 9.02484, \\ \lambda_4 &= 15.99848, & \lambda_5 &= 25.006, & \lambda_6 &= 36.0038, \\ \lambda_7 &= 49.0028, & \lambda_8 &= 64.0021, & \lambda_9 &= 81.0016. \end{aligned}$$

Для пробного потенциала $\tilde{q}$ используем разложение в конечный ряд Фурье с неизвестными коэффициентами

$$\tilde{q} = a_0 + \sum_{i=1}^7 a_i \cos(ix) + b_i \sin(ix).$$

Выберем начальное приближение

$$\tilde{q}^0 = 0, \quad Q = 0, \quad \mu_i = i^2, \quad i = 1, 2, \dots,$$

определим девять СФ по формулам (7), решим далее задачу минимизации для функционала (5) и найдем коэффициенты a_i и b_i согласно приведенному выше поэтапному описанию. На 4-й итерации квадратичная невязка

$$\delta = \int_0^\pi (\tilde{q}^4 - \cos(4x))^2 dx$$

составляла искомую точность 10^{-5} .

Для понимания роли тихоновского стабилизатора $\Omega[\tilde{q}(x)]$ были проведены расчеты при $\alpha = 0$. Произошел взрыв погрешности δ до значений 10^3 . Только на 30-й итерации потенциал был похож на искомый, при этом стабильного графика добиться не удалось, а невязка δ осциллировала от значений 10^{-3} до 10^1 .

Таким образом, ясна роль стабилизатора для итерационного алгоритма некорректной задачи. Действительно, уравнение (3) относительно потенциала $q(x)$ возможно интерпретировать как решение интегрального уравнения первого рода, поэтому некорректная обратная задача Ш-Л может быть решена с применением регуляризующих алгоритмов, один из вариантов которых предложен в настоящей статье. Применение в данной задаче рядов Фурье оправдано, так как тригонометрические функции сохраняют свою ортогональность на дискретном множестве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe* // Acta Math. – 1946. – v.78 – с.1-96
- [2] Тихонов А. Н. Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач* // Москва Наука – 1986. – с.288
- [3] Терновский В. В. Хапаев М. М. *Восстановление потенциала в обратной задаче Штурма-Лиувилля вариационным методом* // ДРАН – 2006. – т.406 – №5
- [4] Калиткин Н. Н. *Вычисления на квазиравномерных сетках* // Москва Физматлит – 2005. – с.224

О НЕФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями рассматривались многими математиками и имеют приложения к теории плазмы, теории многомерных диффузионных процессов, стохастической теории управления и т. д. (см. библиографию в [6]) В работах [3], [4] были рассмотрены эллиптические системы в области с гладкой границей и краевыми условиями, связывающими значение функции и ее производных на границе области со значениями на некотором гладком многообразии без края, лежащем строго внутри области. Была доказана фредгольмовость данной задачи в предположении некоторых условий согласования нелокальных и локальных краевых условий. Данные результаты были обобщены в работах [5], [6], где также был построен правый регуляризатор и доказана фредгольмовость нелокальной задачи, но доказательство было проведено для произвольных линейных нелокальных операторов и было основано только на ограниченности этих операторов в соответствующих пространствах и на отделимости носителя ненелокальных членов от границы.

В настоящей работе рассматривается эллиптическое уравнение второго порядка с аналогичным нелокальным краевым условием. Предполагается, что условие ограниченности соответствующего нелокального оператора нарушается. В этом случае, при дополнительных ограничениях на оператор задачи, доказано, что априорная оценка для такой задачи неверна.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) — открытая область. Введем пространства Соболева–Слободецкого $W_2^k(\Omega)$, $k \geq 0$. Для целого k $W_2^k(\Omega)$ определяется как пространство функций, имеющих все обобщенные производные вплоть до k -ого порядка из $L_2(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Для дробного $k \geq 0$ $W_2^k(\Omega)$ определяется как пространство функций из $W_2^{[k]}(\Omega)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left\{ \|u\|_{W_2^{[k]}(\Omega)}^2 + \sum_{|\alpha|=[k]} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\mu}} dx dy \right\}^{1/2},$$

где $\mu = k - [k]$, $[\cdot]$ — целая часть числа, $0 < \mu < 1$ и α — мультииндекс.

Нам также потребуются эквивалентные нормы для случаев всего пространства и полупространства, записанные через преобразование Фурье. Условимся в дальнейшем обозначать через $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ преобразование Фурье функции u .

В случае, когда Ω совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ норму в пространстве Соболева–Слободецкого для произвольного $k \in \mathbb{R}$ можно записать в эквивалентной форме:

$$\|u\|_{W_2^k(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{k/2} \tilde{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

где $\tilde{u}$ — преобразование Фурье функции u , зависящее от переменных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Если же Ω представляет из себя полупространство: $\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$, то норму в пространстве Соболева–Слободецкого для целого положительного k можно ввести

эквивалентным образом:

$$\|u\|_{W_2^k(\Omega)} = \left(\int_0^\infty \left(\|u\|_{W_2^k(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})}^2 + \|\partial^k u / \partial x_n^k\|_{L_2(\mathbb{R}_{x'}^{n-1})}^2 \right) dx_n \right)^{1/2},$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n)$.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\Gamma \in C^\infty$. Тогда существует покрытие Γ открытыми областями $\mathcal{O}(x^i)$ ($x^i \in \mathcal{O}(x^i) \cap \Gamma$, $i = 1, \dots, \nu$) такими, что в каждой области $\mathcal{O}(x^i)$ определено бесконечно дифференцируемое преобразование координат $y = C_i(x)$, в результате которого $\mathcal{O}(x^i) \cap \Gamma$ становится отрезком прямой с уравнением $y_2 = 0$, а точка x^i переходит в начало координат. Пусть $\{\alpha_i(x)\}$; $x \in \Gamma$, разбиение единицы в окрестности Γ , т.е. функции удовлетворяющие условиям $\sum_{i=1}^\nu \alpha_i \equiv 1$, $\alpha_i \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \alpha_i \in \mathcal{O}(x^i)$. Через $W_2^k(\Gamma)$ обозначим комплексное пространство Соболева–Слободецкого функций $u \in L_2(\Gamma)$ таких, что в локальных координатах y^i мы имеем $C_i(\alpha_i u) \in W_2^k(\mathbb{R})$ ($i = 1, \dots, \nu$). Норма в $W_2^k(\Gamma)$ вводится по формуле

$$\|u\|_{W_2^k(\Gamma)} = \left\{ \sum_{i=1}^\nu \|\alpha_i u\|_{W_2^k(\mathbb{R})}^2 \right\}^{1/2},$$

где нормы $\|\alpha_i u\|_{W_2^k(\mathbb{R})}$ вычисляются в координатах y^i .

В дальнейшем нам потребуется еще одно определение. Замкнутый оператор $T : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ называется фредгольмовым, если $R(T)$ замкнуто и $\dim N(T) = \dim R(T)^\perp < \infty$, где $N(T)$ и $R(T)$ — соответственно ядро и образ оператора T .

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение

$$Au = f_0(x) \quad (x \in Q) \quad (1)$$

с краевым условием

$$Bu = u|_\Gamma + B_1 u = f_1(x) \quad (x \in \Gamma). \quad (2)$$

Здесь

$$(Au)(x) = A(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

— дифференциальный оператор с комплексными коэффициентами $a_\alpha \in C(\bar{Q})$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}$; $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$; $f_0(x) \in L_2(Q)$. Рассмотрим также характеристический многочлен

$$A(x, \zeta) = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \zeta^\alpha,$$

где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\zeta^\alpha = \zeta_1^{\alpha_1} \zeta_2^{\alpha_2}$.

В дальнейшем, будем предполагать, что оператор A удовлетворяет условию правильной эллиптичности: при $x \in \bar{Q}$ для любых двух ортогональных векторов $\nu \neq 0$ и $\eta \neq 0$ уравнение относительно τ $A(x, \eta + \tau \nu) = 0$ имеет один корень в верхней и один корень в нижней полуплоскостях. Также, очевидно, что первое слагаемое краевых условий (взятие следа $u|_\Gamma$ на границе области) удовлетворяет условию дополнительности Лопатинского (в дальнейшем это слагаемое мы будем называть *локальной* частью краевых условий). Для того, чтобы определить оператор B_1 (*нелокальную* часть краевых условий) введем вспомогательный оператор $\tilde{B}_1$:

$$(B1) \quad \tilde{B}_1 : W_2^2(Q_\delta) \rightarrow W_2^{3/2}(\Gamma) \text{ — линейный ограниченный оператор и } f_1 \in W_2^{3/2}(\Gamma).$$

Здесь $Q_\delta \subset Q$ — область с границей $\Gamma_\delta \in C^{m_0}$ ($\rho(\Gamma_\delta, \Gamma) \geq \delta > 0$). Наконец, $B_1 u = \tilde{B}_1(u|_{Q_\delta})$.

В работе [5] были доказаны справедливость априорной оценки и фредгольмовость данной задачи в случае выполнения условия (B1).

В данной работе рассматривается задача (1) – (2), но при выполнении следующего условия:

(B2) $\tilde{B}_1 : W_2^2(Q_\delta) \rightarrow W_2^{3/2}(\Gamma)$ — линейный неограниченный оператор, $\tilde{B}_1 : W_2^2(Q_\delta) \rightarrow W_2^{1/2}(\Gamma)$ — линейный ограниченный оператор и $f_1 \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ и $B_1 u = \tilde{B}_1(u|_{Q_\delta})$.

То есть, мы будем предполагать, что порядок нелокальных членов выше, чем порядок локальных. Примером такого оператора может служить оператор взятия нормальной производной на Γ_δ . В данном разделе будет доказано, что в случае выполнения условия (B2) нарушается априорная оценка для задачи (1) – (2).

Введем гильбертовы пространства

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_1(Q, \Gamma) &= L_2(Q) \times W_2^{3/2}(\Gamma), \\ \mathcal{W}_2(Q, \Gamma) &= L_2(Q) \times W_2^{1/2}(\Gamma)\end{aligned}$$

с нормами

$$\begin{aligned}\|F\|_{\mathcal{W}_1(Q, \Gamma)} &= \left\{ \|f_0\|_{L_2(Q)}^2 + \|f_1\|_{W_2^{3/2}(\Gamma)}^2 \right\}^{1/2}, \\ \|F\|_{\mathcal{W}_2(Q, \Gamma)} &= \left\{ \|f_0\|_{L_2(Q)}^2 + \|f_1\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)}^2 \right\}^{1/2},\end{aligned}$$

где $F = (f_0, f_1)$. Определим операторы $\mathcal{L}_1 : W_2^2(Q) \rightarrow \mathcal{W}_1(Q, \Gamma)$ и $\mathcal{L}_2 : W_2^2(Q) \rightarrow \mathcal{W}_2(Q, \Gamma)$ как операторы задачи (1)-(2) при выполнении условий (B1) или (B2) соответственно.

Напомним, что в случае выполнения условия (B1) в работе [5] доказано выполнение априорной оценки вида

$$\|u\|_{W_2^2(Q)} \leq \tilde{c}_1 (\|\mathcal{L}_1 u\|_{\mathcal{W}_1(Q, \Gamma)} + \|u\|_{L_2(Q)}). \quad (3)$$

В данной работе будет показано, что аналогичная оценка для случая (B2) неверна при некоторых дополнительных ограничениях на оператор A .

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 1. Пусть $1 < l_0 < 3/2$. Тогда существует функция $\psi(t)$ с компактным носителем, такая что

$$\psi \in W_2^l(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad 1 \leq l < l_0, \quad (4)$$

$$\psi \notin W_2^k(\mathbb{R}) \quad \text{при} \quad l_0 < k \leq 3/2. \quad (5)$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} t^s \xi(t) & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}, \quad (6)$$

где $\xi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, определенная на $[0, \infty)$, такая что $\xi(t) \equiv 1$ при $t \in [0, \frac{\varepsilon}{2}]$ и $\xi(t) \equiv 0$ при $x \in [3\varepsilon/4, \infty)$, где ε — положительное достаточно малое число. Если теперь выбрать $l_0 = s + 1/2$ для произвольного $1/2 < s < 1$, то нетрудно будет показать, что функция (6) будет удовлетворять условиям (4) – (5).

Лемма 2. Пусть выполняется условие (B2) и найдется такая $x^i \in \Gamma$, что в окрестности $\mathcal{O}(x^i)$ этой точки преобразование координат C_i , распрямляющее границу переводит оператор A в оператор Лапласа. Тогда существует последовательность $\{u_k\} \in W_2^2(Q)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая следующим условиям

- (i) $\|u_k\|_{W_2^2(Q)} \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$,
- (ii) $\text{supp } u_k \in \overline{Q} \setminus Q_\delta$,
- (iii) $\|Au_k\|_{L_2(Q)} \leq K_1$,
- (iv) $\|u_k\|_{W_2^1(Q)} \leq K_2$,

где константы K_1 и K_2 не зависят от k .

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $\vartheta(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ с носителем, принадлежащим отрезку $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Для таких функций построим оператор E продолжения из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Пусть оператор E действует из $W_2^s(\mathbb{R})$ в $W_2^{s+1/2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ по формуле

$$(E\vartheta)(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi_1 y_1 - \sqrt{\xi_1^2 + 1} y_2} \cdot \tilde{\vartheta}(\xi_1) d\xi_1 \quad (7)$$

здесь $s + 1/2$ — целое число (нам потребуется $s = 1/2$ и $s = 3/2$), $\tilde{\vartheta}$ — преобразование Фурье $\mathcal{F}$ функции ϑ , $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}_+$. Выражение (7) можно записать в эквивалентной форме

$$(E\vartheta)(y_1, y_2) = \mathcal{F}_{\xi_1}^{-1} \left(e^{-\sqrt{\xi_1^2 + 1} y_2} \tilde{\vartheta}(\xi_1) \right) (y_1)$$

В дальнейшем нам потребуется, чтобы для оператора E выполнялись следующие свойства:

- (E1) $(E\vartheta)(y_1, 0) = \vartheta$,
- (E2) Имеет место равенство $(\Delta - I)E\vartheta = 0$.
- (E3) оператор E — ограничен.

- 1) Свойство (E1), очевидно, выполняется. Отсюда следует, что оператор $E\vartheta$ действительно является оператором продолжения функции θ с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- 2) Свойство (E2) следует из следующего соотношения

$$\begin{aligned} (\Delta E\psi)(y_1, y_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\xi_1^2 + \left(\sqrt{\xi_1^2 + 1} \right)^2 \right) e^{i\xi_1 y_1 - \sqrt{\xi_1^2 + 1} y_2} \cdot \tilde{\psi}(\xi_1) d\xi_1 = \\ &= (E\psi)(y_1, y_2). \end{aligned}$$

- 3) Для доказательства свойства (E3) оценим норму

$$\begin{aligned} \|E\psi\|_{W_2^{s+1/2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)}^2 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (1 + \xi_1^2)^{s+1/2} e^{-2\sqrt{\xi_1^2 + 1} y_2} |\tilde{\psi}(\xi_1)|^2 d\xi_1 dy_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty (1 + \xi_1^2)^{s+1/2} |\tilde{\psi}(\xi_1)|^2 \cdot (1 + \xi_1^2)^{-1/2} d\xi_1 = \frac{1}{2} \|\psi\|_{W_2^s(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

Рассмотрим точку x^i границы Γ , такую, что в окрестности $\mathcal{O}(x^i)$ этой точки преобразование координат C_i , распрямляющее границу переводит оператор A в оператор Лапласа (такая точка существует в силу условия леммы). В силу леммы 1 найдется функция ψ , удовлетворяющая условиям (4)-(5). Обозначим за ψ_ε сужение функции ψ на отрезок $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Очевидно, что условия (4)-(5) выполняются и для функции ψ_ε в пространствах $W_2^l(-\varepsilon, \varepsilon)$. Введем функцию

$$\Psi(x) = \begin{cases} C_i^{-1}(\psi_\varepsilon(y_1))(x_1, x_2) & \text{при } (x_1, x_2) \in \mathcal{O}(x^i) \cap \Gamma, \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Gamma \setminus \mathcal{O}(x^i). \end{cases}$$

По определению носитель Ψ сосредоточен в $\mathcal{O}(x^i) \cap \Gamma$. Таким образом, так как по определению $C_i(\Psi) = \psi_\varepsilon$ получаем, что

$$\Psi \in W_2^l(\Gamma) \quad \text{при} \quad 1 \leq l < l_0 < 3/2, \quad (8)$$

$$\Psi \notin W_2^l(\Gamma) \quad \text{при} \quad l_0 + \varepsilon_0 \leq l \leq 3/2. \quad (9)$$

Рассмотрим произвольную последовательность функций $\psi_k \in \dot{C}^\infty([-\varepsilon, \varepsilon])$, $k = 0, 1, \dots$, сходящуюся к функции ψ_ε по норме в $W_2^{1/2}(-\varepsilon, \varepsilon)$. Аналогичным образом определим последовательность функций $\Psi_k \in C^\infty(\Gamma)$, сходящихся к функции Ψ также по норме в $W_2^{1/2}(\Gamma)$. Через ψ_{0k} обозначим продолжение функций ψ_k нулем на все $\mathbb{R}$. Очевидно, что $\psi_{0k} \rightarrow \psi$ по норме $W_2^{1/2}(-\varepsilon, \varepsilon)$. Определим u_k по формуле

$$u_k = \beta_i C_i^{-1} (h_i E \psi_{0k}), \quad (10)$$

здесь

- $h_i = h_i(y_1, y_2)$ — бесконечно дифференцируемая функция двух переменных, определенная в полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, такая что
 $h_i(y_1, y_2) \equiv 1$ при $(y_1, y_2) \in B_\varepsilon^+$ — полукруг радиуса ε , лежащий в полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$;
 $h_i(y_1, 0) \equiv 0$ при $y_1 \notin [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ для некоторого достаточно малого $\varepsilon_1 > \varepsilon$, вообще говоря зависящего от ε ;
 носитель функции $h_i(y_1, y_2)$ целиком лежит в полукруге $B_{\varepsilon_1}^+$ радиуса ε_1 ;
- $\beta_i = \beta_i(x_1, x_2)$ — бесконечно дифференцируемая функция двух переменных, определенная в $\mathbb{R}^2$, такая что
 $\beta_i(x_1, x_2) \equiv 1$, если (x_1, x_2) лежат в пересечении некоторой окрестности точки x^i и области Q , причем данное пересечение содержит множество $C_i^{-1}(B_{\varepsilon_1}^+)$
 $\beta_i(x_1, x_2) \equiv 0$, если (x_1, x_2) лежит вне некоторой бóльшей окрестности x^i ;

За счет выбора ε и ε_1 можно считать, что носитель функции β_i лежит в $\mathcal{O}(x^i)$ и в $\bar{Q} \setminus Q_\delta$.

Очевидно, что из определения функций u_k следует, что выполняется условие (ii) леммы.

Докажем утверждение (i). Предположим противное. Пусть найдется такая константа c_5 не зависящая от k , что $\|u_k\|_{W_2^2(Q)} < c_5$. Тогда из компактности вложения пространства $W_2^2(Q)$ в $W_2^{2-\sigma}(Q)$ для любого $\sigma > 0$ следует, что найдется подпоследовательность $u_{k_m} \in W_2^2(Q)$ сходящаяся по норме в $W_2^{2-\sigma}(Q)$. Значит и последовательность следов $u_{k_m}|_\Gamma$ сходится в $W_2^{3/2-\sigma}(\Gamma)$. Нетрудно показать, что данная сходимости эквивалентна тому, что $\Psi \in W_2^{3/2-\sigma}(\Gamma)$. Выбирая $\sigma = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - l_0 - \varepsilon_0)$ приходим к противоречию в силу (8) – (9). Таким образом, доказано соотношение (i).

Оценим теперь норму

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{W_2^1(Q)} &= \|\beta_i C_i^{-1} (h_i E \psi_{0k})\|_{W_2^1(Q)} \leq c_1 \|C_i^{-1} (h_i E \psi_{0k})\|_{W_2^1(\mathcal{O}(x^i))} \leq \\ &\leq c_2 \|h_i E \psi_{0k}\|_{W_2^1(B_{\varepsilon_1}^+)} \leq c_3 \|E \psi_{0k}\|_{W_2^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)} \leq c_4 \|\psi_{0k}\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} \leq c_5 \end{aligned} \quad (11)$$

где c_5 — не зависит от k . Доказано соотношение (iv) леммы.

Наконец, соотношение (iii) следует из формулы Лейбница, соотношения (11), ограниченности оператора умножения на гладкую функцию, условия леммы о том, что при преобразовании координат C_i оператор A переходит в оператор Лапласа и свойства (E2) оператора продолжения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия Леммы 2, тогда априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^2(Q)} \leq \tilde{c}_2 (\|\mathcal{L}_1 u\|_{W_2(Q, \Gamma)} + \|u\|_{L_2(Q)}) \quad (12)$$

с некоторой константой $\tilde{c}_2$, не зависящей от u для задачи (1)-(2) неверна, то есть, какая бы ни была константа $\tilde{c}_2$, не зависящая от k , найдется такая последовательность u_k , что правая часть (12) ограничена, а левая стремится к бесконечности.

Теорема 2. В предположениях Леммы 2 оператор $\mathcal{L}_2$ задачи (1)-(2) не является фредгольмовым оператором.

Доказательство. В силу теоремы 7.1 работы [1] и теоремы 1 получаем, что для оператора $\mathcal{L}_2$ нарушается по крайней мере одно из условий: образ $\mathcal{L}_2$ замкнут и ядро $\mathcal{L}_2$ конечномерно. Тогда, в силу определения, данный оператор не является фредгольмовым.

Автор глубоко благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и ряд ценных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971, –104 с.
- [2] Лионс Ж., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1972, – 371 с.
- [3] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Об одном классе общих нелокальных эллиптических задач// Докл. АН СССР. – 1970. – **192**, № 3. – 511-513.
- [4] Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем// Сиб. мат. журн. – 1972. – **13**, № 1. – 165-181.
- [5] Скубачевский А. Л. Разрешимость эллиптических задач с краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского// Дифференциальные уравнения. – 1985. –**21**. – 701-706.
- [6] Skubachevskii A. L. On the stability of index of nonlocal elliptic problems// J. of Mathematical Analysis and Applications, – 1991. – **160**, – 323-341.

О ВЕЛИЧИНЕ СЕЧЕНИЯ СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Автор предполагает, что читателю известно определение *схемы из функциональных элементов*, приведенных в работе [1].

Рассмотрим произвольную схему из функциональных элементов. Упорядоченную пару $t = (b_i, b_j)$, где b_i входной полюс или элемент схемы, а b_j элемент схемы, будем называть *каналом схемы*, если при образовании схемы b_i присоединен к некоторому входу элемента b_j .

Состоянием канала $t = (b_i, b_j)$ при некотором входном наборе $\tilde{\sigma}$ будем считать состояние объекта b_i при этом входном наборе.

Схему, в которой множество входных полюсов и элементов схемы разбито на два подмножества M_1 и M_2 так, что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ и каждое из подмножеств содержит по крайней мере один полюс, будем называть *рассеченной*. Канал (b_i, b_j) рассеченной схемы будем называть *рассеченным*, если b_i и b_j принадлежат разным множествам M_1 и M_2 . Множество всех рассеченных каналов будем называть сечением схемы. Сечение естественным образом разбивается на два подмножества A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned}(b_i, b_j) \in A_1, & \quad \text{если } b_i \in M_1, \quad b_j \in M_2; \\ (b_i, b_j) \in A_2, & \quad \text{если } b_i \in M_2, \quad b_j \in M_1.\end{aligned}$$

Нам будет удобно входной набор рассеченной схемы представлять в виде пары наборов $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, где $\tilde{\alpha}$ -набор состояний входов, принадлежащих M_1 и $\tilde{\beta}$ -набор состояний входов, принадлежащих M_2 .

Состоянием сечения (на некотором входном наборе $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ будем называть совокупность состояний всех рассеченных каналов (обозначение $S(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$). Состояние рассеченного канала t при входном наборе $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ будем обозначать $S_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Совокупности состояний рассеченных каналов, принадлежащих множествам A_1 и A_2 , при входном наборе $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ будем обозначать $S^1(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и $S^2(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, соответственно. Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Во всякой рассеченной схеме такой, что для некоторых входных ее наборов $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ и $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$ имеет место равенство*

$$S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) \quad (1)$$

выполняются соотношения

$$S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Доказательство. Будем говорить, что канал (b_q, b_k) непосредственно следует за каналом (b_i, b_j) , если $j=k$.

Будем говорить, что канал t_i следует за каналом t_j , если в схеме найдется цепочка каналов $t^1, t^2, t^3, \dots, t^n$ такая, что $t^1 = t_i$, $t^n = t_j$ и для $2 \leq q \leq n$ канал t^q является непосредственно следующим за каналом t^{q-1} . Соотношение "канал t_i следует за каналом t_j " будем обозначать $t_j \rightarrow t_i$.

Определим по индукции понятие уровня канала. Канал t_i ($t_i \in A_1$) будем называть *каналом уровня 1*, если этот канал не следует ни за каким каналом из множества A_2 (т.е. это первый рассеченный канал в любой "начинающейся" в множестве M_1 и содержащей его цепочке из непосредственно следующих каналов.) Для канала t_j ($t_j \in A_2$) определение аналогично.

Пусть определены каналы уровня меньше i , принадлежащие множествам A_1 и A_2 . Канал t_q ($t_q \in A_1$) будем называть каналом уровня i (и обозначать $d(t_q) = i$), если из того, что $t_m \rightarrow t_q$ ($t_m \in A_2$) следует, что $d(t_m) \leq i - 1$ и найдется канал

t_v ($t_v \in A_2$) такой, что $t_v \rightarrow t_q$ и $d(t_v) = i - 1$. Для каналов, принадлежащих множеству A_2 определение аналогично.

Для доказательства леммы достаточно установить, для любого канала t имеют место следующие соотношения.

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2), \quad (2)$$

$$S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2). \quad (3)$$

Докажем соотношения (2) и (3) индукцией по уровню канала t .

Рассмотрим произвольный канал t такой, что $t \in A_1$ и $d(t) = 1$. Очевидно, что для любого входного набора $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ значение $S_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ полностью определяется набором $\tilde{\alpha}$. Поэтому

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2),$$

$$S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2).$$

Из (1) следует, что

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Для канала t такого, что $t \in A_2$ и $d(t) = 1$, доказательство аналогично.

Таким образом, установлены соотношения (2), (3) для канала t уровня 1.

Пусть для каналов уровня меньше j , принадлежащих множествам A_1 и A_2 соотношения (2) и (3) доказаны. Докажем их для каналов уровня j .

Рассмотрим произвольный канал t , такой что $t \in A_1$, $d(t) = j$. Очевидно, что для любого входного набора $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ значение $S_t(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ полностью определяется набором $\tilde{\alpha}$ и совокупностью состояний рассеченных каналов t° уровня меньше, чем j на наборе $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Обозначим множество этих каналов через B . В силу индуктивного предположения для любого канала t° из B

$$S_{t^\circ}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_{t^\circ}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_{t^\circ}(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_{t^\circ}(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Поэтому

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2),$$

$$S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_2).$$

Из (1) следует, что

$$S_t(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S_t(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Тем самым установлены соотношения (2) и (3) для каналов уровня j из A_1 . Аналогично устанавливаются соотношения (2) и (3) для каналов уровня j из A_2 .

Лемма полностью доказана.

Обозначим через $F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ набор состояний выходов схемы при входном наборе $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, а через $|S|$ количество элементов в сечении S рассеченной схемы. Далее, через $F_1(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и $F_2(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ обозначим совокупности состояний выходов схемы, соответствующих выходам элементов, принадлежащих соответственно множествам M_1 и M_2 при входном наборе $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$.

Следствие 1. Если $S(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) = S(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$, то

$$F_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = F_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2),$$

$$F_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_2) = F_2(\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2).$$

Рассмотрим произвольную рассеченную схему из функциональных элементов. Пусть $P = \{(\tilde{\alpha}_1^1, \tilde{\alpha}_2^1), (\tilde{\alpha}_1^2, \tilde{\alpha}_2^2), (\tilde{\alpha}_1^3, \tilde{\alpha}_2^3), \dots, (\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n)\}$ некоторое множество входных наборов, где $\tilde{\alpha}_1^i$ и $\tilde{\alpha}_2^i$ наборы, подаваемые на входы, принадлежащие соответственно множествам M_1 и M_2 . Обозначим через P^* множество всех наборов (α_1^i, α_2^j) при $i \neq j$, $1 \leq j$, $j \leq n$.

Теорема 1. Пусть для рассеченной схемы с сечением S найдется множество входных наборов P таких, что

1. $|P| = n$;
 2. Для всех наборов $\tilde{\alpha}^i = (\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i)$ из P выходные наборы $F(\tilde{\alpha}^i)$ схемы совпадают и равны, скажем, набору $(\tilde{\gamma})$;
 3. Для любого набора $(\tilde{\beta})$ из P^* выполнено $F(\tilde{\beta}) \neq (\tilde{\gamma})$.
- Тогда

$$|S| \geq \log_2 n.$$

Доказательство. Обозначим через k количество каналов, принадлежащих сечению S . Рассмотрим множество

$$\{S(\tilde{\alpha}_1^1, \tilde{\alpha}_2^1), S(\tilde{\alpha}_1^2, \tilde{\alpha}_2^2), S(\tilde{\alpha}_1^3, \tilde{\alpha}_2^3), \dots, S(\tilde{\alpha}_1^n, \tilde{\alpha}_2^n)\}$$

Докажем, что при $i \neq j$ выполняется соотношение

$$S(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i) \neq S(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j).$$

Пусть это не верно. Тогда, применяя доказанную лемму для входных наборов $(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i)$ и $(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j)$, получаем

$$S(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j) = S(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i).$$

Далее, из сформулированного в следствии утверждения получаем

$$F_1(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j) = F_1(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i), \quad (4)$$

$$F_2(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j) = F_2(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j). \quad (5)$$

По условию 2 доказываемой теоремы

$$F(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i) = F(\tilde{\alpha}_1^j, \tilde{\alpha}_2^j), \quad (6)$$

Поэтому из (4), (5), (6) следует

$$F(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^j) = F(\tilde{\alpha}_1^i, \tilde{\alpha}_2^i) = \tilde{\gamma}.$$

Это противоречит условию 3 доказываемой теоремы.

Тем самым, мы доказали, что при n входных наборах совокупности состояний рассеченных каналов различны. Поэтому $k \geq \log_2 n$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Лупанов О. Б. Об одном классе схем из функциональных элементов.// Проблемы кибернетики. Москва: Физматгиз – 1962. – Вып. 7. С. 285-294.

THE POINCARÉ-STOKES FORMULA IN AN INFINITE DIMENSIONAL SPACE

We obtain a generalization of the Poincaré-Stokes formula for surfaces of codimension 2 in an infinite dimensional separable Hilbert space. For surfaces of an arbitrary finite codimension, a result is announced.

INTRODUCTION

Let $X = R^m$ and $\bigwedge(X) = \bigwedge^0(X) + \bigwedge^1(X) + \bigwedge^2(X) + \dots$ be the exterior algebra. An inner product in $\bigwedge^s(X)$ is introduced for decomposable skew-symmetric tensors by

$$(x|y) = (x_1 \wedge \dots \wedge x_s | y_1 \wedge \dots \wedge y_s) = (\det(x_i, y_j))$$

with a subsequent bilinear extension. Let $f_1, \dots, f_s$ be smooth vector fields on X . As usual, the exterior products (multivector fields) $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_s$ of collections of vector fields are defined pointwise and, for $s \geq 2$, define a divergence of the multivector field by

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_s = (-1)^s & \left[\sum_{l=1}^s (-1)^l (\operatorname{div} f_l) f_1 \wedge \dots \wedge \hat{f}_l \wedge \dots \wedge f_s + \right. \\ & \left. \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} \left(\frac{df_k}{dx} f_1 \wedge \dots \wedge \hat{f}_k \wedge \dots \wedge f_s + \dots + f_1 \wedge \dots \wedge \hat{f}_k \wedge \dots \wedge \frac{df_k}{dx} f_s \right) \right], \quad (1) \end{aligned}$$

where $\frac{df}{dx}$ is the operator field $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^s} \right) = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$, and $\hat{f}$ means omitting the corresponding vector field in the formula.

Let M be an orientable smooth surface in X of codimension p with boundary ∂M and an orientation on ∂M be chosen to agree with the orientation on M . Let now f_j be smooth vector fields on X ; $n_M(x) = n(x) = n_1(x) \wedge \dots \wedge n_{m-p}(x)$ a normal normed multivector on M , $n_j(x) \in (T_x M)^\perp$ for $x \in M$, which agrees with the orientation on M ; $n_{\partial M}(x)$ a vector field on ∂M , uniquely defined by the following conditions: a) $n_{\partial M}(x) \in (T_x M)^\perp \cap T_x M$, b) $n_{\partial}(x) = n_1(x) \wedge \dots \wedge n_{m-p}(x) \wedge n_{\partial M}(x)$ is a normal normed multivector on ∂M that agrees with the orientation on ∂M . Finally, denote by $d\mu_M$ and $d\mu_{\partial M}$ measures on the surfaces M and ∂M , correspondingly, induced by the Lebesgue measure on X .

Statement 1. *Using the above notations, the Poincaré-Stokes theorem takes the following form:*

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} (f_1(x) \wedge \dots \wedge f_{m-p+1}(x) | n_1(x) \wedge \dots \wedge n_{m-p}(x) \wedge n_{\partial M}(x)) d\mu_{\partial M} = \\ \int_M (\operatorname{div} (f_1(x) \wedge \dots \wedge f_{m-p+1}(x)) | n_1(x) \wedge \dots \wedge n_{m-p}(x)) d\mu_M. \end{aligned}$$

The idea of the proof of this statement is not difficult and we do not give it here. Of a fundamental importance is the fact that the embedding $M \hookrightarrow X$ permits to consider, instead of differential forms on M , multivectors, more exactly, their components normal with respect to M and to replace the exterior differential with the divergence operation. If the space X is infinite dimensional and the surface M has finite codimension, it is possible to generalize the div operation. A principle difficulty is that there is no an invariant measure on X . This difficulty has been overcome in [1].

If the dimension is finite, one can give another definition of div .

Denote by $\langle x|y^* \rangle$ the pairing between elements of the spaces $\bigwedge(X)$ and $\bigwedge(X^*)$; it is a bilinear operation that is defined for tensors $x \in \bigwedge^s(X)$, $y^* \in \bigwedge^t(X^*)$ by

$$\langle x|y^* \rangle = \begin{cases} 0, & s \neq t, \\ \det(x_i, y^{j*}), & s = t. \end{cases}$$

For $u \in \bigwedge(X)$, $y^* \in \bigwedge(X^*)$, define $i_u(y^*)$ by the formula

$$\langle x|i_u(y^*) \rangle = \langle x \wedge u|y^* \rangle, \quad \forall x \in \bigwedge(X).$$

These operations carry over to multivector fields.

If $e^* = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$, then the div operation on tensors in $\bigwedge(X)$ can be correctly defined by the formula

$$i_{\text{div } f}(e^*) = d(i_f(e^*)).$$

1. SURFACE INTEGRAL

Let now H be a separable real Hilbert space and μ a finite measure defined on the σ -algebra of Borel subsets of H .

On a smooth surface S of a finite codimension in the H the measure μ induces a surface measure μ_S . For surfaces of the codimension 1 in an infinite dimensional Hilbert space the construction of a surface integral was considered in [1] for the first time. In [2] was proposed another approach to the problem. For our objects it's more convenient to use different construction of the surface integral, that is equivalent in the codimension 1 to the integrals obtained in [1] and [2].

Define a surface S in H to be an open subset of the joint level surface of a finite collection of C^2 -functions on H with bounded supports and having the second derivatives uniformly bounded on H , $S \subset \{x|g_1(x) = \cdots = g_n(x) = 1\}$.

An additional condition, $\inf_S \Gamma(g'_1(x), \dots, g'_n(x)) > 0$, where $\Gamma(\cdot)$ is the Gramm determinant, implies that the codimension of the embedding of the surface S does not degenerate, $\text{codim } S = n$.

It also follows from the conditions that S is bounded and the function $\Gamma(\cdot)$ is integrable, $\Gamma(\cdot) \in L_1(H, \mu)$.

Suppose now that the surface S can be projected in one-to-one way (orthogonally) onto an (open) subset of the space $L \subset H$, $P_L : S \rightarrow P_LS \subset L$, and denote by U_L the mapping inverse to P_L (the "pull back" operator), $U_L : P_LS \rightarrow S$. The mapping U_L is smooth by the implicit function theorem.

Let n_L be a multivector normal to L , it is assumed to have norm one, and $n(x)$ a multivector normal to S at the point $x \in S$. Let the condition $\inf_S |(n(x)|n_L)| > 0$ holds, which can locally be satisfied.

According to [1], denote by M_μ the set of admissible translations of the measure μ . A vector $a \in H$ was called in [1] an admissible direction for the measure μ if $\lambda a \in M_\mu$ for all $\lambda > 0$. If $n = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ and all vectors $\pm e_1, \dots, \pm e_p$ are admissible directions, then the multivector n is called an admissible direction. We will assume that n_L is an admissible direction.

Similarly to [1], denote by $\mu_{L^\perp}$ the projection of the measure μ on $L^\perp$, μ_L the projection of the measure μ onto L , $\tilde{\mu} = \mu_{L^\perp} \times \mu_L$, $\sigma(\cdot) = \sigma_n(\cdot)$ the density of the measure $\mu_{L^\perp}$ with respect to the Lebesgue measure on $L^\perp$; for $a \in M_\mu$, $\rho_\mu(a, x) = \frac{d\mu_a}{d\mu}(x)$.

Let $i : R^n \rightarrow L^\perp \in H$ be an Euclidean isomorphism. Then $\tilde{\mu} \prec \mu$ and, for all $x \in H$,

$$\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}(x) = \sigma(P_{L^\perp} x) \int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), x) d\vec{\alpha}. \quad (2)$$

A proof of this fact is an immediate corollary of the technique developed in [1] §20.

Let $t_m(\vec{s})$ be a δ -shape sequence of compactly supported functions on R^n at the point $\vec{1} = (1, \dots, 1)$. More exactly,

- 1) $t_m \in C(R^n); t_m(\vec{s}) \geq 0, \vec{s} \in R^n;$
- 2) $\int_{R^n} t_m(\vec{s}) d\vec{s} = 1;$
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \exists M \forall m \geq M, \text{supp } t_m \subset \{\vec{s} \mid \|\vec{s} - \vec{1}\| \leq \varepsilon\}.$

The conditions on the collection of functions $\{g_k(\cdot)\}$ imply that there exist $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ such that $S \subset \{x \in S_{L,\delta} \mid \forall j : |g_j(x) - 1| < \varepsilon\}$, where $S_{L,\delta} = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S; x_2 \in L^\perp; \|x_2\| < \delta\}$.

For a function f bounded and continuous on H , define a surface integral of f by the formula

$$\int_S f(x) d\mu_S = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{S_{L,\delta}} f(x) t_m(g_1(x), \dots, g_n(x)) \sqrt{\Gamma(g'_1(x), \dots, g'_n(x))} d\mu. \quad (3)$$

Let us also assume the following:

- a) the function $x \mapsto \int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), x) d\vec{\alpha}$ is continuous and bounded from below on $P_L S$ by a positive constant;
- b) $\inf_{x \in S} |(n(x) \mid n_L)| > 0$, where $n(x)$ is a normed normal multivector.

Theorem 1. *Formula (3) is well-defined, that is, the limit in the right-hand side exists, does not depend on a choice of the sequence $\{t_m\}$ and a collection of the functions $\{g_1, \dots, g_n\}$ that define the surface. We also have that*

$$\int_S f(x) \mu_S(dx) = \int_{P_L S} \frac{f(U_L x)}{\int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), U_L x) d\vec{\alpha} |(n(U_L x) \mid n_L)|} \mu_L(dx). \quad (4)$$

Доказательство. Let us transform the integral in the right-hand side of (3) using (2),

$$\begin{aligned} \int_{S_{L,\delta}} f(x) t_m(g_1(x), \dots, g_n(x)) \sqrt{\Gamma(g'_1(x), \dots, g'_n(x))} d\mu \\ = \int_{P_L S} \int_{B_\delta} \frac{f(\cdot) t_m(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)) \sqrt{\Gamma(g'_1(\cdot), \dots, g'_n(\cdot))}}{\sigma(x_2) \int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), \cdot) d\vec{\alpha}} \Big|_{U_L x_1 + x_2} d\mu_{L^\perp} d\mu_L. \end{aligned}$$

Here B_δ is a δ -neighborhood of 0 in the space $L^\perp$.

Since supports of the δ -shape sequence contract to $\vec{1}$, without loss of generality, the inner integral can be taken over the whole space $L^\perp$. Hence, the right-hand side of (3) becomes

$$\int_{P_L S} d\mu_L \int_{R^n} \frac{f(\cdot) t_m(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)) \sqrt{\Gamma(g'_1(\cdot), \dots, g'_n(\cdot))}}{\int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), \cdot) d\vec{\alpha}} \Big|_{U_L x + i(\vec{\tau})} d\vec{\tau}.$$

If we will prove that

$$\int_{R^n} t_m(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)) \sqrt{\Gamma(g'_1(\cdot), \dots, g'_n(\cdot))} \Big|_{U_L x + i(\vec{\tau})} d\vec{\tau} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{|(n(U_L x) \mid n_L)|} \quad (5)$$

for all $x \in P_L S$, then we would have that

$$\begin{aligned} h_m(x) = \int_{R^n} \frac{f(\cdot) t_m(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot)) \sqrt{\Gamma(g'_1(\cdot), \dots, g'_n(\cdot))}}{\int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), \cdot) d\vec{\alpha}} \Big|_{U_L x + i(\vec{\tau})} d\vec{\tau} \\ \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{f(U_L x)}{\int_{R^n} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), U_L x) d\vec{\alpha} \cdot |(n(U_L x) \mid n_L)|} \end{aligned}$$

everywhere on P_LS .

The conditions imposed on the functions f , ρ_μ , and $\{g_k\}$ allow to conclude that the functions h_m are measurable and uniformly bounded on P_LS and, hence, applying the Lebesgue theorem shows that the sequence in the right-hand side of (3) converges and (4) holds.

Let us now pass to a proof of (5).

Make a change of variables,

$$1 = \int_{R^n} t_m(\vec{s}) d\vec{s} = \int_{R^n} t_m(\vec{g}(U_Lx + i(\vec{\tau}))) \cdot \left| \det \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\tau}}(\vec{\tau}) \right| d\vec{\tau}.$$

Denote by $\vec{g}'(\cdot)$ the multivector $g'_1(\cdot) \wedge \dots \wedge g'_n(\cdot)$. Then is not difficult to check that

$$\det \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{\tau}}(\vec{\tau}) = (\vec{g}'(U_Lx + i(\vec{\tau}))|n_L).$$

Hence, for all m ,

$$\int_{R^n} t_m(\vec{g}(U_Lx + i(\vec{\tau}))) \cdot |(\vec{g}'(U_Lx + i(\vec{\tau}))|n_L)| d\vec{\tau} = 1. \quad (6)$$

Fix $x \in P_LS$ and consider the function

$$G_x(\vec{\tau}) = \sqrt{\Gamma(U_Lx + i(\vec{\tau}))} |(n(U_Lx)|n_L)| - |(\vec{g}'(U_Lx + i(\vec{\tau}))|n_L)|.$$

Then $G_x(\vec{0}) = 0$. Indeed, the multivectors $\vec{g}'(U_Lx)$ and $\vec{n}(U_Lx)$ are collinear and the modulus of the collinearity coefficient is the volume of the parallelepiped constructed on the vectors $g'_1(U_Lx), \dots, g'_n(U_Lx)$, which is $\sqrt{\Gamma(U_Lx)}$.

The function $G_x(\vec{\tau})$ is continuous and, hence, for a δ -shape sequence t_m with supports containing $\vec{1}$, we have

$$\int_{R^n} t_m(\vec{g}(U_Lx + i(\vec{\tau}))) \cdot G_x(\vec{\tau}) d\vec{\tau} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Comparing this with (6) we get (5).

Since we have two expressions (3) and (4) for $\int_S f d\mu_S$, the second of which depends neither on the sequence $\{t_m\}$ nor on the collection $\{g_1, \dots, g_n\}$, using a standard argument we see that formula (3) does not depend on $\{t_m\}$ and $\{g_k\}$. $\square$

Remark 1. The same argument shows that the right-hand side of (3) does not depend on $\delta > 0$. More involved considerations show that the found quantity does not, in fact, depend on the choice of the admissible space L .

Remark 2. It follows from (4) that, on the surface, there is a measure defined on the σ -algebra of Borel subsets of S and the surface integral is defined for all measurable functions on S for which the right-hand side of (4) makes sense.

Remark 3. In the case where the surface S can be given as a finite or a countable union of parts each of which satisfies the condition for formula (3) to be applied, the surface integral can be defined on the whole surface via the additivity principle. In particular, if the surface S is defined as a level surface common to a system of smooth functions,

$$S = \{x \mid g_1(x) = \dots = g_m(x) = 1\},$$

and the functions g_k satisfy the conditions mentioned above, then S can be split into a countable number of parts each of which admits a one-to-one projection onto some subspace $L \subset H$. In such a case, the formula

$$\int_S f(x) d\mu_S = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_H f(x) t_m(g_1(x), \dots, g_n(x)) \sqrt{\Gamma(g'_1(x), \dots, g'_n(x))} d\mu. \quad (7)$$

can be obtained, for example, by applying the corresponding partition of the identity technique [3].

2. THE POINCARÉ-STOKES FORMULA FOR A SURFACE OF CODIMENSION 2

Let S be a surface of codimension 1 in a Hilbert space H with a measure μ , $S \subset \{x \mid g_1(x) = 1\}$, $\partial S = \{x \mid g_1(x) = g_2(x) = 1\}$, and the functions g_1 and g_2 satisfy the conditions in Section 2 for the integrals over S and ∂S to be defined.

Theorem 2. *If the surface S and ∂S satisfy the above mentioned conditions, then for any function f bounded on H and a sequence of δ -shape functions t_m (see Section 2), we have*

$$\int_{\partial S} f(x) d\mu_{\partial S} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_S f(x) h_m(x) d\mu_S, \quad (8)$$

where

$$h_m(x) = t_m(g_2(x)) \frac{\sqrt{\Gamma(g'_1(x), g'_2(x))}}{\|g'_1(x)\|}. \quad (9)$$

Доказательство. Consider a portion of the surface ∂S that admits a one-to-one projection onto a codimension 2 subset of the space L_2 such that the intersection of an ε -neighborhood of this part of ∂S with the surface S is projected in a one-to-one way onto a subset of a codimension 1 subspace $L_1 \supset L_2$. In virtue condition 3) on contractions of the supports of the functions t_m to a point and Remark 3, it is sufficient to obtain formulas (8) and (9) locally. This portion of ∂S will still be denoted by ∂S and a strip of S in a vicinity of ∂S will be denoted as before by S .

If P_{L_1} and P_{L_2} are corresponding orthogonal projection operators, then $P_{L_2} = P_{L_2}^{L_1} \circ P_{L_1}$, where $P_{L_2}^{L_1}$ is the operator of projection onto L_2 in L_1 , and $P_{L_1}(\partial S) = \partial(P_{L_1}S)$ in the appropriate notations. Let the symbols U_{L_1} , U_{L_2} , $U_{L_2}^{L_1}$ denote the corresponding lifting operators ($U_{L_2}^{L_1} : P_{L_2}(\partial S) \rightarrow P_{L_1}(\partial S)$). Here, $\partial(P_{L_1}S) = P_{L_1}S \cap \{x \in L_1 \mid (g_2 \circ U_{L_1})(x) = 1\}$ for a smooth function $g_2 \circ U_{L_1}$.

It follows from (4) that

$$\int_{\partial S} f(x) d\mu_{\partial S} = \int_{P_{L_2}\partial S} \frac{f(U_{L_2}x)}{\int_{R^2} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), U_{L_2}x) d\vec{\alpha} \cdot |(n_{\partial}(U_{L_2}x)|n_{L_2})|} d\mu_{L_2}. \quad (10)$$

On the other hand, Theorem 1 gives

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_S f(x) h_m(x) d\mu_S &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{P_{L_1}S} \frac{f(U_{L_1}x) h_m(U_{L_1}x)}{\int_R \rho_\mu(\alpha n_{L_1}, U_{L_1}x) d\alpha \cdot |(n_S(U_{L_1}x), n_{L_1})|} d\mu_{L_1} = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{P_{L_1}S} \frac{f(U_{L_1}x) \sqrt{\Gamma(g'_1(U_{L_1}x), g'_2(U_{L_1}x))} \cdot t_m((g_2 \circ U_{L_1})x) \|(g_2 \circ U_{L_1})'x\|}{\int_R \rho_\mu(\alpha n_{L_1}, U_{L_1}x) d\alpha \cdot |(n_S(U_{L_1}x), n_{L_1})| \cdot \|g'_1(U_{L_1}x)\| \cdot \|(g_2 \circ U_{L_1})'x\|} d\mu_{L_1}. \end{aligned}$$

Again, applying Theorem 1 to the corresponding function on the space L_1 , we see that the latter limit exists and equals

$$\begin{aligned} \int_{P_{L_2}\partial S} \frac{f(U_{L_2}x) \sqrt{\Gamma(g'_1(U_{L_2}x), g'_2(U_{L_2}x))}}{\int_R \rho_\mu(\alpha n_{L_1}, U_{L_2}x) d\alpha \cdot |(n_S(U_{L_2}x), n_{L_1})| \cdot \|g'_1(U_{L_2}x)\| \cdot \|(g_2 \circ U_{L_1})'(U_{L_2}^{L_1}x)\|} \\ \cdot \frac{1}{\int_R \rho_{\mu_{L_1}}(\beta \cdot n_{L_2}^{L_1}, U_{L_2}^{L_1}x) d\beta \cdot |(n_{\partial P_{L_1}S}^{L_1}(U_{L_2}^{L_1}x), n_{L_2}^{L_1})|} d\mu_{L_2}. \quad (11) \end{aligned}$$

Here $n_*^{L_1}$ denote normal vectors in the space L_1 .

The equality of the expressions (10) and (11) follows from equalities that are easily to check: for $x \in L_2$,

$$\int_{R^2} \rho_\mu(i(\vec{\alpha}), U_{L_2}x) d\vec{\alpha} = \int_R \rho_\mu(\alpha \cdot n_{L_1}, U_{L_2}x) d\alpha \cdot \int_R \rho_{\mu_{L_1}}(\beta \cdot n_{L_2}^{L_1}, U_{L_2}^{L_1}x) d\beta; \quad (12)$$

$$\frac{1}{|(n_{\partial}(U_{L_2}x)|n_{L_2})|} = \frac{\sqrt{\Gamma(g'_1(U_{L_2}x), g'_2(U_{L_2}x))}}{|(n_S(U_{L_2}x), n_{L_1})| \cdot \|g'_1(U_{L_2}x)\|} \cdot \frac{1}{\left\| (g_2 \circ U_{L_1})'(U_{L_2}^{L_1}x) \right\| \cdot |(n_{\partial P_{L_1}S}(U_{L_2}^{L_1}x), n_{L_2}^{L_1})|}. \quad (13)$$

□

Remark 4. Assuming that the projections of S and ∂S to L_1 and $L_2 \subset L_1$, correspondingly, are one-to-one, it follows from the proof of the theorem that

$$\int_{\partial S} f d\mu_{\partial S} = \int_{\partial(P_{L_1}S)} \frac{f(U_{L_1}x)}{\int_R \rho_{\mu}(\alpha n_{L_1}, U_{L_1}x) d\alpha \cdot |(n_{\partial}(U_{L_1}x)|n_{L_1} \wedge n_{\partial(P_{L_1}S)}(x))|} d\mu_{\partial(P_{L_1}S)}. \quad (14)$$

Indeed, by (10) and (12) we get

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} f d\mu_{\partial S} &= \int_{P_{L_2}(\partial S)} \frac{f(U_{L_2}x)}{\int_R \rho_{\mu}(\alpha \cdot n_{L_1}, U_{L_2}x) d\alpha \cdot \int_R \rho_{\mu_{L_1}}(\beta \cdot n_{L_2}^{L_1}, U_{L_2}^{L_1}x) d\beta \cdot |(n_{\partial}(U_{L_2}x)|n_{L_2})|} d\mu_{L_2} \\ &= \int_{P_{L_2}^{L_1}(\partial(P_{L_1}S))} \frac{f(U_{L_1}U_{L_2}^{L_1}x)}{\int_R \rho_{\mu}(\alpha \cdot n_{L_1}, U_{L_1}U_{L_2}^{L_1}x) d\alpha \cdot \int_R \rho_{\mu_{L_1}}(\beta \cdot n_{L_2}^{L_1}, U_{L_2}^{L_1}x) d\beta} \\ &\quad \cdot \frac{1}{|(n_{\partial(P_{L_1}S)}(U_{L_2}^{L_1}x), n_{L_2}^{L_1})| \cdot |(n_{\partial}(U_{L_2}x)|n_{L_1} \wedge n_{\partial(P_{L_1}S)}(U_{L_2}^{L_1}x))|} d\mu_{L_2} \\ &= \int_{\partial(P_{L_1}S)} \frac{f(U_{L_1}x)}{\int_R \rho_{\mu}(\alpha n_{L_1}, U_{L_1}x) d\alpha \cdot |(n_{\partial}(U_{L_1}x)|n_{L_1} \wedge n_{\partial(P_{L_1}S)}(x))|} d\mu_{\partial(P_{L_1}S)}. \end{aligned}$$

The identity

$$|(n_{\partial}(U_{L_2}x)|n_{L_2})| = |(n_{\partial(P_{L_1}S)}(U_{L_2}^{L_1}x), n_{L_2}^{L_1})| \cdot |(n_{\partial}(U_{L_2}x)|n_{L_1} \wedge n_{\partial(P_{L_1}S)}(U_{L_2}^{L_1}x))|$$

is obtained from the simple geometrical considerations.

The sought formula in codimension 2 has the following form:

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} (f_1(x) \wedge f_2(x)|n_S(x) \wedge n_{\partial S}(x)) d\mu_{\partial S} \\ = \int_S (\operatorname{div}(f_1(x) \wedge f_2(x)) + l_{\mu}(f_1(x), x)f_2(x) - l_{\mu}(f_2(x), x)f_1(x), n_S(x)) d\mu_S \end{aligned} \quad (15)$$

Here $f_k(\cdot)$ are smooth vector fields; the divergence of the bivector field $f_1(\cdot) \wedge f_2(\cdot)$ is given by (1) for $s = 2$,

$$\operatorname{div}(f_1(x) \wedge f_2(x)) = -\operatorname{Tr} f'_1(x) \cdot f_2(x) + \operatorname{Tr} f'_2(x) \cdot f_1(x) + f'_1(x)f_2(x) - f'_2(x)f_1(x).$$

$n_S(x)$ is the normal to the surface S ; $\{n_S(x), n_{\partial S}(x)\}$ is an orthonormal base in the space normal to ∂S at the point x . For $x \in \partial S$, the normal vector $n_{\partial S}(x)$ is directed outward with respect to S (the agreement of the orientations). $l_{\mu}(a; x)$ is the logarithmic derivative of the measure μ in the direction a at the point x .

In the course of obtaining formula (15) we will obtain additional sufficient conditions on the vector fields, the measure, and the surface.

Let us first consider the case $f_1(x) \wedge f_2(x) = f(x)a \wedge b$, where f is a number C^1 -function on H , a and b are fixed orthonormal vectors.

We will assume that the surface S can be projected onto the subspace $L = L_a = (a)^\perp$ in a one-to-one way such that a , more exactly $\pm a$, is an admissible direction. By (14) we have

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} (f(x)a \wedge b | n_S(x) \wedge n_{\partial S}(x)) d\mu_{\partial S} \\ &= \int_{\partial P_L S} \frac{(f(U_L x)a \wedge b | n_S(U_L x) \wedge n_{\partial S}(U_L(x)))}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau \cdot |(n_S(U_L(x)) \wedge n_{\partial S}(U_L x) | a \wedge n_{\partial P_L S}(x))|} d\mu_{\partial P_L S}, \end{aligned} \quad (16)$$

where $n_{\partial(P_L S)}$ is a vector normal to $\partial(P_L S)$ in L .

Lemma 1. *We have the following:*

$$|(n_S \wedge n_{\partial S} | a \wedge n_{\partial P_L S})| = \sqrt{(n_S, a)^2 + (n_{\partial S}, a)^2}, \quad (17)$$

$$n_S \wedge n_{\partial S} = n_S \wedge n_{\partial P_L S} \frac{|(n_S \wedge n_{\partial S} | a \wedge n_{\partial P_L S})|}{(n_S, a)}. \quad (18)$$

For $x \in \partial(P_L S)$, denote

$$s(x) = \text{sign}(n_S(U_L x) \wedge n_{\partial S}(U_L x) | a \wedge n_{\partial P_L S}(x)).$$

Then by using Lemma 1 and since a and $n_{\partial(P_L S)}$ are orthogonal, the right-hand side of (16) can be rewritten as

$$\begin{aligned} & \int_{\partial P_L S} \frac{(f(U_L x)a \wedge b | n_S(U_L x) \wedge n_{\partial S}(U_L x))}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau \cdot |(n_S(U_L x) \wedge n_{\partial S}(U_L x) | a \wedge n_{\partial P_L S}(x))|} d\mu_{\partial P_L S} \\ &= \int_{\partial P_L S} \frac{(f(U_L x)a \wedge b | n_S(U_L x) \wedge n_{\partial P_L S}(x))}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau \cdot (a, n_S(U_L x))} s(x) d\mu_{\partial P_L S} \\ &= \int_{\partial P_L S} \frac{f(U_L x) \cdot ((a, n_S(U_L x)) \cdot (b, n_{\partial(P_L S)}(x)) - (b, n_S(U_L x)) \cdot (a, n_{\partial P_L S}(x)))}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau \cdot (a, n_S(U_L x))} \\ & \quad s(x) d\mu_{\partial P_L S} \\ &= \int_{\partial P_L S} \frac{f(U_L x) \cdot (b, n_{\partial P_L S}(x))}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} s(x) d\mu_{\partial P_L S} \\ &= \int_{\partial P_L S} \left(\frac{f(U_L x)}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} b, s(x) n_{\partial P_L S}(x) \right) d\mu_{\partial P_L S}. \end{aligned}$$

If the vector a is chosen such that $(a, n_S(x)) > 0$ on S , then since the orientations of S and ∂S agree, it follows that $s(x) = 1$ and, hence, we can apply formula (6) from § 28 [1], which is a generalization of the Gauss–Ostrogradskiĭ formula, to get for the latter expression the following:

$$\int_{P_L S} \text{Tr} \left(\frac{f(U_L x)}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} b \right)' - l_{\mu_L} \left(\frac{f(U_L x)}{\int_R \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} b, x \right) d\mu_L. \quad (19)$$

The directional derivative of a measure is understood in the sense of [1], which corresponds to the weak derivative of the measure in the sense of [4], [5].

Lemma 2. 1) *If there exists $l_\mu(b, \cdot)$, then there is $l_{\mu_L}(b, \cdot)$ on L and*

$$l_{\mu_L}(b, x) = \int_R \frac{l_\mu(b, x + \tau a)}{\int_R \rho_\mu(\alpha a, x + \tau a) d\alpha} d\tau$$

on L .

2) If there exists $\rho_\mu(b, \cdot)$, then there is $\rho_{\mu_L}(b, \cdot)$ on L and

$$\rho_{\mu_L}(b, P_L x) = \frac{\int_R \rho_\mu(\tau a, x - b) d\tau}{\int_R \rho_\mu(\alpha a, x) d\alpha} \rho_\mu(b, x)$$

on H .

The generalized Gauss–Ostrogradskii formula from [1] was used for a vector field of the form $g(x)b$. Although the surface integral in the paper is defined differently as compared with [1], formula (4), in the case of codimension 1, remains true, and precisely this formula was used in [1] for obtaining the generalized Gauss–Ostrogradskii formula. Hence, using the result of Lemma 2, applicability of this formula follows from the following conditions, assumed in addition to the conditions formulated in Section 2:

- 1) $f(x)$ is a C^1 -function on H ;
- 2) there exists $\left(\int_R \rho_\mu(\tau a, x) d\tau \right)'_b \in L_1(H, \mu)$;
- 3) the function $l_\mu(b, x)$ is defined and $l_{\mu_L}(b, x - \lambda b)$ is continuous with respect to λ for almost all $x \pmod{\mu}$.

Lemma 3. *In addition to the above assumptions let the following hold:*

- 1) the function $\rho_\mu(\cdot, \cdot)$ is bounded on bounded sets;
- 2) the function $l_\mu(a, x)$ is defined and $l_\mu(a, x - \lambda a)$ is continuous with respect to λ for almost all $x \pmod{\mu}$;
- 3) the function $F(x) = \int_R \rho_\mu(\tau a, x) d\tau$ is differentiable uniformly in the direction b on bounded subsets of H , that is, for every bounded set $B \subset H$, the sequence $\frac{1}{\lambda}(F(x + \lambda b) - F(x))$ converges to $F'_b(x)$ uniformly in $x \in B$ for $\lambda \rightarrow 0$.

Then we have the following almost everywhere on H :

$$\begin{aligned} \left(1 / \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, x) d\tau \right)'_b &= (l_{\mu_L}(b, P_L x) - l_\mu(b, x)) / \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, x) d\tau, \\ \exists \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, x) d\tau \right)'_a &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, x) d\tau \cdot l_\mu(a, x). \end{aligned}$$

Lemma 4. *For $x \in L$, we have that*

$$(f \circ U_L)'(x, b) = f'(U_L x, b) - \frac{(b, n_S(U_L x))}{(a, n_S(U_L x))} f'(U_L x, a).$$

(Here and in the sequel, $f'(x, b) = f'_b(x)$ denotes the derivative of the function f at the point x in the direction of b .)

By using Lemma 4 and linearity almost everywhere with respect to the first argument, let us transform the integrand in (19) as follows:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\frac{f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} b \right)' - l_{\mu_L} \left(\frac{f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} b, x \right) \\ = \text{Tr} \left(\frac{f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} b \right)' - \frac{f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, U_L x) d\tau} l_{\mu_L}(b, x) \\ = \left(\frac{f(\cdot)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, \cdot) d\tau} \right)'(U_L x, b) - \frac{(b, n_S(U_L x))}{(a, n_S(U_L x))} \left(\frac{f(\cdot)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\mu(\tau a, \cdot) d\tau} \right)'(U_L x, a) \end{aligned}$$

$$- \frac{f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau} l_{\mu_L}(b, x).$$

By Lemma 3, the above expression becomes

$$\begin{aligned} & \frac{f'(U_L x, b)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau} - \frac{f(U_L x)}{(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, \cdot) d\tau \right)'(U_L x, b) \\ & - \frac{(b, n_S(U_L x))}{(a, n_S(U_L x))} \left(\frac{f'(U_L x, a)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau} - \frac{f(U_L x)}{(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, \cdot) d\tau \right)'(U_L x, a) \right) \\ & - \frac{f(U_L x)}{(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau)^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau \cdot l_{\mu}(b, U_L x) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, \cdot) d\tau \right)'(U_L x, b) \right) \\ & = \frac{f'(U_L x, b) - l_{\mu}(b, U_L x) f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau} - \frac{(b, n_S(U_L x))}{(a, n_S(U_L x))} \frac{f'(U_L x, a) - l_{\mu}(a, U_L x) f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau}. \end{aligned} \quad (20)$$

Let us transform the right-hand side of (15). First note that the value of the first term in $\text{div}(f_1(x) \wedge f_2(x))$ does not depend on a decomposition of the bivector ω into $\omega = f_1(x) \wedge f_2(x)$. Because of $(\text{mod } \mu)$ -linearity of $l_{\mu}(\cdot, \cdot)$ with respect to the first argument, the value of $l_{\mu}(f_1(x), x) f_2(x) - l_{\mu}(f_2(x), x) f_1(x)$ does not depend on the decomposition too.

Hence, we can take that $f_1(x) = f(x)a$, $f_2(x) = b$, where $f(x)$ is the considered above smooth scalar function on H . Then

$$\text{div}(f_1(x) \wedge f_2(x)) = -\text{Tr} [(f(x)a)'] b + (f(x)a)' b = -f'(x, a)b + f'(x, b)a;$$

$$l_{\mu}(f_1(x), x) f_2(x) - l_{\mu}(f_2(x), x) f_1(x) = f(x)(l_{\mu}(a, x)b - l_{\mu}(b, x)a) \pmod{\mu}.$$

Since the orientations of S and ∂S agree, recall that $(a, n_S(x)) > 0$ on S . Hence, with the use of (4) the right-hand side of (15) becomes

$$\begin{aligned} & \int_S (f'(x, b) - l_{\mu}(b, x) f(x)) \cdot (a, n_S(x)) - (f'(x, a) - l_{\mu}(a, x) f(x)) \cdot (b, n_S(x)) d\mu_S \\ & = \int_{P_L S} \left(\frac{f'(U_L x, b) - l_{\mu}(b, U_L x) f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau} - \frac{(b, n_S(U_L x))}{(a, n_S(U_L x))} \frac{f'(U_L x, a) - l_{\mu}(a, U_L x) f(U_L x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\mu}(\tau a, U_L x) d\tau} \right) d\mu_L, \end{aligned}$$

where the integrand coincides with the function in (20). This proves formula (15) for the bivector field of the form $f(x)a \wedge b$.

Both sides of formula (14) are additive with respect to S and, hence, this formula remains valid if the surface S is split into a finite or a countable number of parts each of which can be projected in a one-to-one way onto $L_a = (a)^{\perp}$. Since both sides of formula (15) depend linearly on the bivector field, the result remains true if the vector fields $f_1(x)$ and $f_2(x)$, which define the bivector $f_1(x) \wedge f_2(x)$, belong to a fixed finite dimensional subspace N_n with $N_n \subset M_{\mu}$ for every $x \in H$. We assume that the surface

S satisfies the following additional condition: for all $a \in N_n$ it can be subdivided into a finite or a countable number of parts each of which can be projected onto $L_a = (a)^\perp$ in a one-to-one way.

For a bivector field $f_1(x) \wedge f_2(x)$ defined by a smooth bounded vector fields f_1 and f_2 such that $f'_1(\cdot)$ and $f'_2(\cdot)$ are fields of nuclear operators, following [1] we assume that there exists an increasing chain of finite dimensional subspaces N_n such that the union $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ is dense in H and $N \subset M_\mu$. For every n , the subspace N_n has the above mentioned property. For all $a \in N$, $l_\mu(a, x)$ is defined and measurable with respect to x . Then the bivector field $P_n f_1(x) \wedge P_n f_2(x)$ satisfies (15), where P_n is an orthogonal projection onto N_n , and

$$\begin{aligned} & \int_{\partial S} (P_n f_1(x) \wedge P_n f_2(x) | n_S(x) \wedge n_{\partial S}(x)) d\mu_{\partial S} \\ &= \int_S (-\text{Tr} (P_n f'_1(x)) \cdot P_n f_2(x) + \text{Tr} (P_n f'_2(x)) \cdot P_n f_1(x) \\ & \quad + P_n f'_1(x) P_n f_2(x) - P_n f'_2(x) P_n f_1(x) \\ & \quad + l_\mu(P_n f_1(x), x) \cdot P_n f_2(x) - l_\mu(P_n f_2(x), x) \cdot P_n f_1(x), n_S(x)) d\mu_S. \end{aligned}$$

Since N is dense in H , $P_n f_k(x) \rightarrow f_k(x)$ and $\text{Tr} (P_n f'_k(x)) \rightarrow \text{Tr} (f'_k(x))$ converge everywhere on H . However, we need a condition that would imply that we can pass to the limit.

Let us now gather sufficient conditions for applicability of formula (15), counting the result of A. V. Skorokhod [1].

1. The surface S of codimension 1 and its boundary ∂S satisfy the conditions imposed in Section 2, which permit to correctly introduce μ_S and $\mu_{\partial S}$ and have the orientations that agree in the above sense.
2. There exists an increasing sequence of finite dimensional subspaces N_n such that their union, N , is dense in H and $N \subset M_\mu$.
3. The vector fields $f_1(x)$, $f_2(x)$ are C^1 on H ; $f_k(x) \in N$ for almost all $x(\text{mod } \mu)$; $\text{Tr } f'_k(x)$ exists for almost all $x(\text{mod } \mu)$; f_k , $\|f'_k(x)\|$, $\text{Tr } f'_k(x)$ are bounded on H or in a neighborhood of the surface S .
4. The function $\rho_\mu(\cdot, \cdot)$ is bounded on all bounded sets; the function $\int_R \rho_\mu(\tau a, x) d\tau$ is continuous on H , $\inf_{x \in H} \int_R \rho_\mu(\tau a, x) d\tau > 0$, for all $a \in N$.
5. The function $l_\mu(a, \cdot)$ is defined on H for every $a \in N$ and for all $b \in N$, $b \perp a$, the functions $l_\mu(a, x - \lambda a)$, $l_{\mu_{(a)^\perp}}(b, x - \lambda b)$ are continuous with respect to λ for almost all $x(\text{mod } \mu)$.
6. For all $a, b \in N$, $a \perp b$, there exists $\left(\int_R \rho_\mu(\tau a, x) d\tau \right)'_b \in L_1(H, \mu)$, and $F(x) = \int_R \rho_\mu(\tau a, x) d\tau$ is differentiable uniformly with respect to the direction b on bounded subsets of H , that is, for every bounded set $B \subset H$, the sequence $\frac{1}{\lambda}(F(x + \lambda b) - F(x))$ converges to $F'_b(x)$ for $\lambda \rightarrow 0$ uniformly in $x \in B$.
7. The sequence of functions $|l_\mu(P_n f_k(x), x)|$ is uniformly integrable with respect to the measure μ on H , or in a neighborhood of the surface S .
8. For every $a \in N$, the surface S can be split into a finite or a countable number of parts each of which is projected onto $L_a = (a)^\perp$ in a one-to-one way.

Theorem 3. *If conditions 1–8 are satisfied, then both sides of identity (14) make sense and formula (15) holds.*

3. THE GENERALIZED POINCARÉ-STOKES FORMULA FOR A SURFACE OF FINITE CODIMENSION

Let us introduce the following notations:

$$(\operatorname{div}_\mu f)(x) = \operatorname{Tr} f'(x) - l_\mu(f(x), x),$$

where f is a vector field on H ;

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\mu(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) &= (-1)^m \left(\sum_{k=1}^m (-1)^k (\operatorname{div}_\mu f_k) f_1 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_k \wedge \cdots \wedge f_m \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \sum_{j \neq k} f_1 \wedge \cdots \wedge f_{j-1} \wedge \frac{df_k}{dx} f_j \wedge \cdots \wedge \hat{f}_k \wedge \cdots \wedge f_m \right), \end{aligned}$$

where $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_m$ is a multivector field on H .

Then using (1) we have

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\mu(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) &= \operatorname{div}(f_1 \wedge \cdots \wedge f_m) + \\ &+ (-1)^{m+1} \sum_{k=1}^m (-1)^k l_\mu(f_k(x), x) f_1 \wedge \cdots \wedge \hat{f}_k \wedge \cdots \wedge f_m. \end{aligned}$$

If S is a smooth surface in H of codimension $m - 1$ with boundary ∂S , $n(x) = n_1(x) \wedge \cdots \wedge n_{m-1}(x)$ is a multivector formed from an orthonormal basis in $(T_x S)^\perp$, $n_{\partial S}(x)$ is an outer normal field to ∂S in S , $n_{\partial S}(x) \in (T_x(\partial S))^\perp$, $n_\partial(x) = n(x) \wedge n_{\partial S}(x)$, then, making some technical assumptions on S , μ , f , we have the following formula:

$$\int_{\partial S} (f|n_\partial) d\mu_{\partial S} = \int_S (\operatorname{div}_\mu f|n) d\mu_S.$$

REFERENCES

- [1] A. V. Skorokhod, *Integration in a Hilbert space*, Nauka, Moscow, 1975. (Russian).
- [2] A. V. Uglov, *Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2000.
- [3] Lang S., *An introduction to differentiable manifolds*, , Columbia University, New York, 1962.
- [4] V. I. Averboukh, O. G. Smoluanov, S. V. Fomin, *Differentiable measures*, Generalized functions and differentiable equations in linear spaces, Trudy Mosk. Mat. Obshch., vol. 24, 1971, pp. 133–174. (Russian).
- [5] Yu. L. Daletskiĭ, S. V. Fomin, *Mesures and differential equations in infinite dimensional spaces*, Nauka, Moscow, 1983.

RELATIONS BETWEEN MODERN AND CLASSICAL SEMIGROUPS

Classification of 'classical' semigroups: strongly continuous, of class $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}, \mathbf{C}_{(k)}, \mathbf{A}$, and growth order α , and 'modern' ones: integrated, convoluted, and R -semigroups is constructed according to behavior of their generators.

1. INTRODUCTION

In the end of last century we could see sharp increase of interest to investigation of solving operators to the abstract Cauchy problem

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0; T], T \leq \infty, \quad u(0) = f, \quad (1)$$

as well as to some others operators related to (1) in Banach and locally convex spaces. There were introduced new families of operators called integrated semigroups, R -semigroups and convoluted semigroups [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Natural development of these semigroups theory led to the problem of setting relations between new semigroup families [11, 13] and between these semigroups and well-studied semigroups of class $\mathbf{C}_0$ [8].

In the present paper we made an attempt to construct classification of semigroups by ordering semigroups of class $\mathbf{C}_0$ and those without property of strong continuity at zero with modern semigroups. The last-named being not semigroups upon a whole are closely related to semigroups of solving operators and turn out to be important for many applications.

The basic part of the paper presents a scheme of relations between semigroups mentioned above upon to inclusions of their generators; that is section 3. In section 2 necessary definitions and properties of semigroups are given. Section 4 presents proof of the inclusions. Examples reading the structure of inclusions and some semigroup classes nonemptiness complete the paper.

2. NECESSARY DEFINITIONS AND PROPERTIES OF SEMIGROUPS

Definition 1. A family of bounded linear operators $\{U(t), t > 0\}$ acting on a Banach space X and satisfying the conditions

$$(U1) \quad U(t+h) = U(t)U(h), \quad t, h \geq 0; \quad U(0) = I;$$

(U2) $U(\cdot)$ is an operator-function strongly continuous with respect to $t > 0$; is called a *strongly continuous semigroup*. Operator defined by the equality:

$$U'(0)f = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(U(h) - I)f, \quad \text{Dom } U'(0) = \left\{ f \in X : \exists \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(U(h) - I)f \right\},$$

is called an *infinitesimal operator*, it is closable and $A := \overline{U'(0)}$, is called an *(infinitesimal) generator of the family $\{U(t), t > 0\}$* .

If the operator function $U(\cdot)$ strongly continuous with respect to $t \geq 0$, it is called a *semigroup of class $\mathbf{C}_0$* . Such semigroups and only they are bounded in the neighborhood of zero [7].

Now we introduce semigroups where the condition of strong continuity at $t \geq 0$ (equivalent to strong continuity at $t = 0$) is replaced by certain weaker conditions.

Definition 2. Let $\int_0^1 \|U(t)f\| dt < \infty$, $f \in X$. If $U(\cdot)$ is Cesaro-summable (C -summable): $\lim_{\eta \rightarrow 0} C(\eta)f = f$, $f \in X$, where $C(\eta)f := \frac{1}{\eta} \int_0^\eta U(s)f ds$, it is called a

semigroup of class $\mathbf{C}$; if Abel-summable (A -summable): $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \tilde{U}(\lambda)f = f$, $f \in X$, where $\tilde{U}(\lambda)f := \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)f dt$, $\lambda \in \mathbb{R}$, then a *semigroup of class $\mathbf{A}$* .

It is known that for any strongly continuous in $t > 0$ semigroup the generator is dense in $X_0 := \bigcup_{t>0} U(t)[X]$, and for semigroups mentioned above X_0 is dense in X [7]. Hence A is densely defined. Besides, if $\overline{X_0} = X$, then due to Banach–Steinhouse theorem, behavior at zero of semigroup of class $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}$, and $\mathbf{A}$ is relatively described as follows:

$$\|U(t)\| =_{t \rightarrow 0} \mathcal{O}(1), \quad \|C(\eta)\| =_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{O}(1), \quad \|\tilde{U}(\lambda)\| =_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{O}(1/\lambda). \quad (2)$$

For semigroups of class $\mathbf{C}_{(k)}$ and semigroups of growth order α defined below, $\overline{X_0} = X$ is taken as the preset condition. These semigroups, similar to semigroups of class $\mathbf{C}$ and $\mathbf{A}$, are not bounded in a neighborhood of zero and their main property is defined by their special behavior at zero.

Definition 3. Let $\overline{X_0} = X$. A semigroup $\{U(t), t \geq 0\}$ is called a *semigroups of class $\mathbf{C}_{(k)}$* if

- (1) $\exists w : \forall \lambda > w$, operator $\tilde{U}(\lambda)$ is defined on X_0 and invertible;
- (2) $\text{Dom } A^k \subset \Sigma = \{f \in X : \lim_{t \rightarrow +0} U(t)f = f\}$.

A semigroup $\{U(t), t \geq 0\}$ is called a *semigroup of growth order α* ($\alpha \geq 0$) if

- (1) $\forall t > 0$, $U(t)f = 0 \Rightarrow f = 0$,
- (2) $\|t^\alpha U(t)\|$ is bounded as $t \rightarrow +0$.

In the general case a semigroup of solving operators to the Cauchy problem (1) may be not only unbounded in a neighborhood of zero, but be defined not on the whole X . In this case some new families of operators modifying the family of solving operators are introduced. They smooth solving operators in t (integrated and convoluted semigroups) or correct them by a certain operator R in X (R -semigroups).

Definition 4. A one parameter family of linear bounded operators $\{V(t), t \in [0, \tau)\}$, $\tau \leq \infty$, acting on a Banach space X is called an *n -times integrated semigroup* if

- (V1) $\frac{1}{(n-1)!} \int_0^t [(s-r)^{n-1} V(t+r) - (t+s-r)^{n-1} V(r)] dr = V(t)V(s)$,
 $t, s, t+s \in [0, \tau)$, $V(0) = 0$;
- (V2) the operator-function $V(\cdot)$ is strongly continuous in $t \in [0, \tau)$;
- (V3) $(\forall t \in [0, \tau), V(t)f = 0) \Rightarrow f = 0$.

As it is well-known, all strongly continuous semigroups are exponentially bounded (that is $\exists M > 0, a, \omega \in \mathbb{R} : \|U(t)\| \leq Me^{\omega t}, t > a$). The introduced integrated semigroups as well as introduced below convoluted ones and R -semigroups may be not exponentially bounded, moreover they can be defined only locally.

A semigroup $\{V(t), t \in [0, \tau)\}$ is called *exponentially bounded* if $\tau = \infty$ and

$$\|V(t)\|_{L(X)} \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

for certain $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. It is called *local* if $\tau < \infty$.

The generator of an exponentially bounded n -times integrated semigroup is defined as follows. $A := \lambda I - r(\lambda)^{-1}$, $\Re \lambda > \omega$, where $r(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} V(t) dt$. The generator of a local one is defined as the particular case from definition 5 given below.

Definition 5. Let A be a linear closed operator on X . Let $R(t)$ be an integrable on $[0, \tau)$, $\tau \leq \infty$, operator function. A strongly continuous with respect to $t \in [0, \tau)$ family of linear bounded operators $\{Q(t), t \in [0, \tau)\}$ acting on X and satisfying equations

$$A \int_0^t Q(s)f ds = Q(t)f - \int_0^t R(s)f ds, \quad f \in X, \quad t \in [0, \tau), \quad (3)$$

$$\int_0^t Q(s)Af \, ds = Q(t)f - \int_0^t R(s)f \, ds, \quad f \in \text{Dom } A, \quad t \in [0, \tau), \quad (4)$$

is called a *regularized* (*R-regularized*) *semigroup of operators generated by A*, in addition *A* is called *the generator of the family* $\{Q(t), t \in [0, \tau)\}$.

A *R-regularized semigroup* is called *nondegenerate* if $Q(t)f = 0$ for every $t \in (0; \tau)$ implies $f = 0$.

If $R(t) = k(t)I$, where k is $\mathbb{R}$ -valued continuous function, an *R-regularized semigroup* is called *k-convoluted semigroup of operators generated by A*.

Definition 6. A family of linear bounded operators $\{S(t), t \in [0, \tau)\}, \tau \leq \infty$, acting on X and satisfying conditions

(R1) $S(t+s)R = S(t)S(s), \quad s, t, s+t \in [0, \tau); \quad S(0) = R;$

(R2) operator-function $S(\cdot)$ is strongly continuous with respect to $t \in [0, \tau);$ is called an *R-semigroup*.

In the case $R = I$ characteristic property of *R-semigroup* (R1) coincides with semigroup property $U(t+s) = U(t)U(s)$ which can be continued for each $t, s \geq 0$. Thus *I-semigroup* is a semigroup of class $\mathbf{C}_0$.

As the basis for definition of a generator of introduced family we take the definition of infinitesimal generator. Nevertheless in the case of *R-semigroups* there are some of such definitions.

Definition 7. Let $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$ be an *R-semigroup*. Operators G and Z defined by equalities

$$Gf := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R^{-1}S(t) - I}{t} f, \quad Zf := R^{-1} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - R}{t} f,$$

with domains

$$\text{Dom } G := \left\{ f \in \text{Ran } R : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R^{-1}S(t) - I}{t} f \text{ exists} \right\},$$

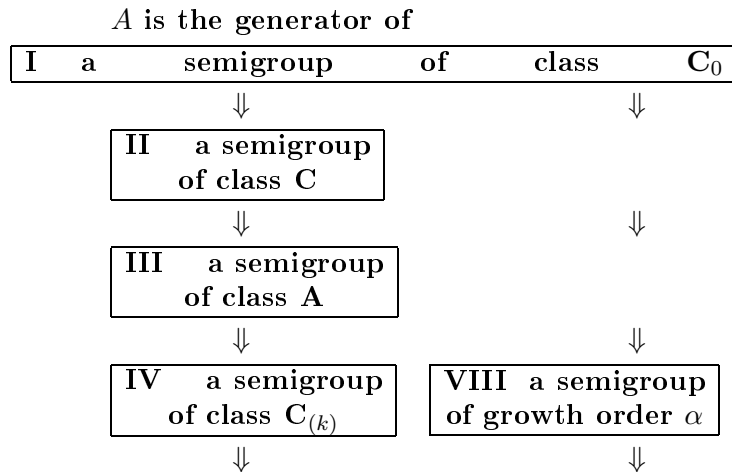
$$\text{Dom } Z := \left\{ f \in X : \text{there exists } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t) - R}{t} f \in \text{Ran } R \right\},$$

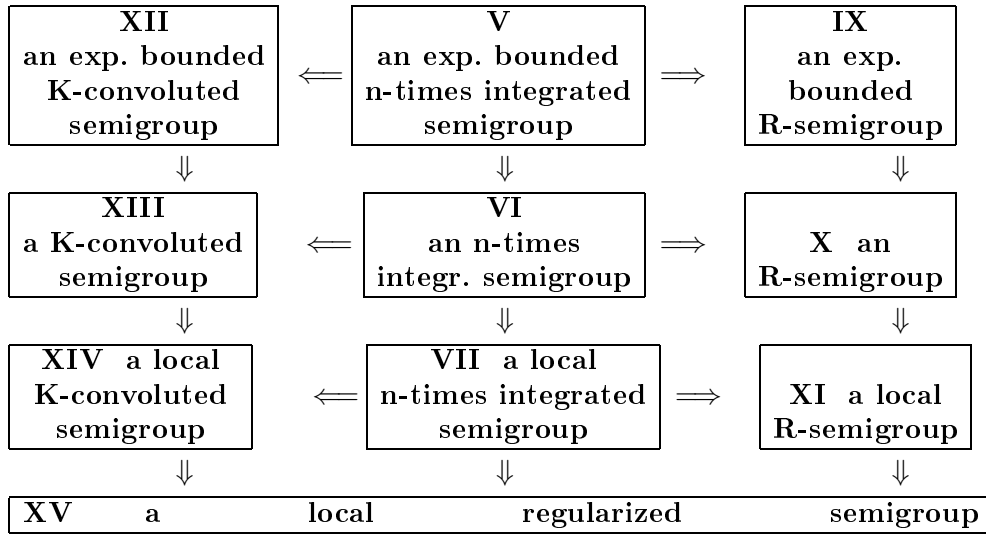
correspondingly, are called *infinitesimal generators of the family* $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$.

An operator equal to the closure of G : $A = \overline{G}$ is called (*complete infinitesimal generator* of the family $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$).

Note that defining such semigroups authors initially called them *C-semigroups* (see e.g. [5, 13]. We prefer the notation '*R-semigroup*' due to its regularization property and unlike $\mathbf{C}_0$ -semigroups (semigroups of class $\mathbf{C}_0$), where $\mathbf{C}$ stands for 'continuity'.

3. SCHEME OF RELATIONS BETWEEN GENERATORS OF SEMIGROUPS





4. PROOF OF IMPLICATIONS

Before proving the implications we note that in the case of all strongly continuous semigroups (of class $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}, \mathbf{C}_{(k)}, \mathbf{A}$) we deal with very solving operators. Since definitions of generators for these semigroups are the same, inclusions for classes of generators of these semigroups in the scheme are really the inclusions for classes of corresponding semigroups. In the case of integrated and R -semigroups we deal not with solving operators, but with some their (different) transformations, therefore the inclusions settled for the generators do not hold for the semigroups. As for integrated and convoluted ones, they are transformed in a similar manner, and the inclusions again take place for generators and semigroups.

$I \Rightarrow II \Rightarrow III$. It is evident that if $\lim_{\eta \rightarrow 0+} U(\eta)f = f$ for any $f \in X$, then $\lim_{\eta \rightarrow 0+} \frac{1}{\eta} \int_0^\eta U(s)f ds = f$. Let us show that if $\lim_{\eta \rightarrow 0+} C(\eta)f ds = f$, then $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \tilde{U}(\lambda)f = f$.

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{U}(\lambda)f &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)f dt = \lambda [e^{-\lambda t} \int_0^t U(s)f ds]_0^\infty - \int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda t} [\int_0^t U(s)f ds] f dt = \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} t [\frac{1}{t} \int_0^t U(s)f ds] dt = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} t C(t)f dt, \end{aligned}$$

hence $\tilde{U}(\lambda)f - f = \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} t [C(t)f - f] dt$. Let $\delta > 0$. Since $C(t), t \geq 0$, is (ω) -exponentially bounded, then for $\lambda \geq a > \omega$ we have

$$\begin{aligned} \|\lambda^2 \int_0^\delta e^{-\lambda t} t [C(t)f - f] dt\| &\leq \sup_{0 \leq t \leq \delta} \|C(t)f - f\|, \\ \lambda^2 \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} t [C(t)f - f] dt\| &\leq \frac{\lambda^2 M}{(\lambda - \omega)^2} e^{-(\lambda - \omega)\delta}. \end{aligned}$$

Thus the implications are proved. As for the reverse one, it is proved in [7] that a semigroup of class $\mathbf{A}$ belongs to class $\mathbf{C}$, if and only if its generator is closed.

$III \Rightarrow IV$. It was mentioned above that condition $\overline{X_0} = X$ holds for semigroups of class $\mathbf{A}$. Existence of operator-function $\tilde{U}(\lambda)$ for λ large enough follows from definition of semigroups of class $\mathbf{A}$, and its invertibility from the fact that $\tilde{U}(\lambda)$ for semigroups of class $\mathbf{A}$ coincides with the resolvent of A : $\tilde{U}(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda)$. Besides, it is proved that $\lim_{\eta \rightarrow 0+} U(\eta)f = f$ for $f \in \text{Dom } A^2$ [7]. Hence a semigroup of class $\mathbf{A}$ belongs to class $\mathbf{C}_{(2)}$.

I $\implies$ VIII. If in definition of semigroups of growth order α to take $\alpha = 0$, we obtain a strongly continuous bounded semigroup with densely defined generator. As it was read in the previous section, a bounded strongly continuous semigroup is a semigroup of class $\mathbf{C}_0$.

For semigroups of growth order α there exists operator $(\lambda I - A)^{-1}$, but generally it is not bounded and hence $(\lambda I - A)^{-1}$ is not the resolvent of A . That makes the important difference between semigroups of growth order α and semigroups of class $\mathbf{A}$ and $\mathbf{C}_{(k)}$.

VIII $\implies$ IX. It is proved in [11] that if A is the generator of a semigroup $\{U(t), t \geq 0\}$ of growth order α , then family $\{S(t) = U(t)R, t \geq 0\}$, where

$$Rf = \frac{1}{n!} \int_0^\infty s^n e^{-\lambda s} U(s) f ds = (\lambda I - A)^{-(n+1)}, \quad f \in X, \quad n = [\alpha],$$

forms an R -semigroup.

V $\implies$ IX (VI $\implies$ X, VII $\implies$ XI). Proof of the inclusions follows from result on connection of R -semigroups and n -times integrated semigroups [13]: Let A be a closed operator on X , $\lambda \in \rho(A)$, $n \in \mathbb{N}$, then the following assertions are equivalent:

- (1) A is the generator of an n -times integrated semigroup $\{V(t), t \in [0, \tau)\}$;
- (2) A is the generator of an R -semigroup $\{S(t), t \in [0, \tau)\}$;

Here construction of an R -semigroup via an integrated one and the inverse construction are as follows:

$$S(t)f := \frac{d^n}{dt^n} V(t) \mathcal{R}^n(\lambda_0) f, \quad V(t)f = (\lambda_0 I - A)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} S(t_n) f dt_n \dots dt_2 dt_1,$$

$f \in X$.

IV $\implies$ V. It is proved in [11] that for a semigroup of class $\mathbf{C}_{(k)}$ operator $\tilde{U}(\lambda)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) f dt$, $\lambda > \omega$, is the resolvent of its generator: $\tilde{U}(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda)$, and the family $\{S(t) = U(t) \mathcal{R}^k(\lambda_0)\}$ forms an R -semigroup with $R = \mathcal{R}^k(\lambda_0)$ for each $\lambda_0 > \omega$. Then due to the assertion in the previous point, A is the generator of a k -times integrated semigroup.

V $\implies$ XII (VI $\implies$ XIII, VII $\implies$ XIV). It follows from the connection of n -times integrated semigroups with Cauchy problem (1) that equations (3)–(4) take place with $k(t) = t^n/n!$ and A , the generator of the semigroup [1, 9]. Hence an n -times integrated semigroup is a particular case of a k -convoluted semigroup.

XIV $\implies$ XV. Inclusions for semigroups and their generators follows from definitions of these semigroups.

XI $\implies$ XV. It follows from the connection of R -semigroups with Cauchy problem (1) that equations (3)–(4) take place with $R(t) = R$ and A , the generator of the R -semigroup [5, 9]. Moreover, it is proved in [10] that definition of an R -semigroup as a particular case of an R -regularized semigroup with $R(t) \equiv R$ is equivalent to definition 6 in a Hilbert space.

5. EXAMPLES READING THE STRUCTURE OF IMPLICATIONS

1. Example of an operator which depends on a parameter γ and generates a semigroup of class $\mathbf{C}_0$, an integrated semigroup, a semigroup of growth order α or an R -semigroup in dependence on value of γ [9].

Let $X = L_p(\mathbb{R}) \times L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, be the space of vector-functions $f(\cdot) = (f_1(\cdot), f_2(\cdot))$ with norm $\|f\| = \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$. Consider the operator A of multiplication by the matrix

$$\begin{pmatrix} -h & 0 \\ -g & -h \end{pmatrix} =: \mathcal{A}, \quad \text{Dom } A = \{f \in X : hf_1, gf_1 + hf_2 \in L_p(\mathbb{R})\},$$

where $h(x) = 1 + x^2$, $g(x) = x^{2\gamma}$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$. Then

$$U(t) = e^{At} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots = e^{-t(1+x^2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -tx^{2\gamma} & 1 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\|U(t)\|_{L(X)} = \max \left\{ \max_{x \in \mathbb{R}} e^{-t(1+x^2)}; \max_{x \in \mathbb{R}} t|x|^{2\gamma} e^{-t(1+x^2)} \right\} = \max \{e^{-t}; \gamma t^{1-\gamma} e^{-t-\gamma}\}. \quad (5)$$

It is proved that if $0 \leq \gamma \leq 1$ then operators $U(t)$ are bounded on the whole semi-axis $t \geq 0$. Thus the family of bounded operators $\{U(t), t \geq 0\}$ with $0 \leq \gamma \leq 1$ forms a $\mathbf{C}_0$ -semigroup.

For $\gamma > 1$ the condition MFPHY is not true for $(\lambda I - A)^{-1}$. However this operator is bounded as $1 < \gamma \leq 2$ and unbounded as $\gamma > 2$, therefore, the resolvent of A exists for $\gamma \leq 2$ only.

As it follows from the estimate (5) in the case of $\gamma > 1$ the family $\{U(t), t \geq 0\}$ has a peculiarity as $t = 0$. If, in addition, $\gamma < 2$, then the peculiarity is integrable. We show that in the case of $1 < \gamma < 2$ the operator A generates an 1-time integrated semigroup:

$$V(t) = \int_0^t U(s) ds = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 - e^{-ht} & 0 \\ tge^{-ht} - (1 - e^{-ht})\frac{g}{h} & 1 - e^{-ht} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

The operators $V(t)$ are bounded, $V(\cdot)$ is strongly continuous with respect to $t \geq 0$; the family $\{V(t), t \geq 0\}$ with $1 < \gamma < 2$ satisfies all conditions of the definition of an integrated semigroup, and A is the generator of this semigroup.

For $\gamma > 1$ the estimate (5) implies that the values $\|t^\alpha U(t)\|_{L(X)}$ are bounded as $t \rightarrow 0$ for each $\alpha \geq \gamma - 1$. The set $X_0 := \bigcup_{t>0} U(t)(X)$ is dense in X since the operator $U(t)$ with $t > 0$ maps the dense in X set of finite vector-functions into the set of finite vector-functions. The family $\{U(t), t \geq 0\}$ is nondegenerate: if $U(t)f = 0$ for each $t \geq 0$, then $f = 0$. Therefore, it forms a semigroup of growth order $\alpha \geq \gamma - 1$. Then, as it was shown A generates an R -semigroup with $R = (\lambda_0 I - A)^{-n}$, $n = [\alpha] + 1$. Note that here the operator $(\lambda I - A)^{-n}$ is an n -th exponent of the resolvent only in the case of $\gamma \leq 2$. For another γ just the operator $(\lambda I - A)^{-n}$ is bounded, and the resolvent itself doesn't exist.

2. Consider a set of operators $A = A(a_n, b_n)$, and $U(t)\{x_n, y_n\} = e^{At}\{x_n, y_n\}$

$$= \{e^{a_n t}(x_n \cos b_n t - y_n \sin b_n t), e^{a_n t}(y_n \cos b_n t + x_n \sin b_n t)\}$$

in X , space of pairs $\{x_n, y_n\}$, from [7, 12] demonstrating the structure of some implications in the scheme. We show that for such operators in dependence on choice of a_n, b_n and norms in X , the family $\{U(t), t \geq 0\}$ is an example of

- (i) a strongly continuous semigroup of class $\mathbf{A}$, but not $\mathbf{C}$;
- (ii) a strongly continuous semigroup of class growth order α , but not $\mathbf{A}$;
- (iii) operator A is the generator of an integrated semigroup, but not any of strongly continuous ones.

Let X be the space of pairs $\{(x_n, y_n)\}$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ and $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} |y_n| < \infty$ with norm $\|\{(x_n, y_n)\}\| = \sup_n |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} |y_n|$.

Define $U(t)\{(x_n, y_n)\} =$

$$\{e^{-(n^{\frac{3}{2}} + in^2)t}(x_n \cos n^{\frac{1}{2}}t - y_n \sin n^{\frac{1}{2}}t), e^{-(n^{\frac{3}{2}} + in^2)t}(y_n \cos n^{\frac{1}{2}}t + x_n \sin n^{\frac{1}{2}}t)\}.$$

The family $\{U(t), t > 0\}$ forms a semigroup of bounded operators:

$$\|U(t)\{(x_n, y_n)\}\| \leq \sup |x_n| [1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} e^{-n^{\frac{3}{2}}t}] + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} |y_n|, \quad (6)$$

strongly continuous as $t > 0$ and not as $t \geq 0$. The set $X_0 \equiv \bigcup_{t>0} U(t)[X]$ includes all vectors, whose components equal to zero for large enough numbers, hence it is dense in

X . Operators $\mathcal{R}(\lambda)\{x_n, y_n\} =$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) \{(x_n, y_n)\} dt = \{\alpha_n(\lambda)x_n - \beta_n(\lambda)y_n, \alpha_n(\lambda)y_n + \beta_n(\lambda)x_n\}, \quad (7)$$

$\alpha_n(\lambda) = \frac{\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n}$, $\beta_n(\lambda) = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\lambda + n^{\frac{3}{2}} - in^2)^2 + n}$ exist, bounded for each $\lambda > 0$, and $\alpha_n(\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$, $\beta_n(\lambda) \leq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\lambda^2 + n^4}$. Hence $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leq \frac{C}{\lambda}$ as $\lambda > 1$, and $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mathcal{R}(\lambda)\{x_n, y_n\} = \{x_n, y_n\}$. Hence $\{U(t), t \geq 0\}$ is a semigroup of class **A**.

From (6) we obtain $\|U(t)\| = \mathcal{O}_{t \rightarrow 0}(t^{-\frac{1}{3}})$. Hence $\int_0^\eta U(s)ds$ exists, nevertheless $C(\eta)$ is not bounded as $\eta \rightarrow 0$. Thus the semigroup being of class **A** is not of class **C**.

Let X be the space of pairs $\{(x_n, y_n)\}$ with $\|\{x_n, y_n\}\| = \sum_{n=1}^\infty (|x_n|^2 + n|y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ and let $a_n = -(n+1), b_n = n$. Then

$$U(t) = \{e^{-(n+1)}(x_n \cos nt + y_n \sin nt), e^{-(n+1)}(y_n \cos nt - x_n \sin nt)\},$$

$$\|U(t)\| \leq \sup_n (n^{\frac{1}{2}} e^{-(n+1)t}) = (2et)^{-\frac{1}{2}} e^{-t}.$$

The family $\{U(t), t \geq 0\}$ is a semigroup strongly continuous as $t > 0$. The set X_0 is dense in X . Operators $\mathcal{R}(\lambda)$ defined by (7), where

$$\alpha_n(\lambda) = \frac{\lambda + n + 1}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2}, \quad \beta_n(\lambda) = \frac{n}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2}.$$

are bounded for each $\lambda > 0$. Nevertheless for $\lambda > 0$,

$$\|R(\lambda, A)\| \geq \sup_n \left(n^{\frac{1}{2}} \frac{n}{(\lambda + n + 1)^2 + n^2} \right) \geq \frac{1}{10(\lambda + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hence, by (2) operator A is not the generator of class **A**. Since

$$\|t^{\frac{1}{2}} U(t)\| \leq \sup_n \left(t^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} e^{-(n+1)t} \right) \leq \frac{1}{4} e^{-(t+\frac{1}{2})} \leq \frac{1}{4},$$

$\{U(t), t \geq 0\}$ is a semigroup of class growth order $\alpha = \frac{1}{2}$.

Let X be the space of pairs $\{x_n, y_n\}$ such that $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ and $\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2 < \infty$ with norm $\|\{x_n, y_n\}\| = \sup_n |x_n| + (\sum_{n=1}^\infty |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Let

$$\text{Dom } A = \{ \{(x_n, y_n)\} \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} |ie^n x_n - ny_n| = 0, \sum_{n=1}^\infty |nx_n + ie^n y_n|^2 < \infty \}$$

$A\{x_n, y_n\} := \{ie^n x_n - ny_n, nx_n + ie^n y_n\}$ on $\text{Dom } A$, and corresponding family

$$U(t) = e^{At} = \{e^{ie^{nt}}((x_n \cos nt = y_n \sin nt), e^{ie^{nt}}((y_n \cos nt + x_n \sin nt)\}.$$

Operator A is closed linear and densely defined. Consider operator $(\lambda I - A)^{-1}$:

$$(\lambda I - A)^{-1}\{x_n, y_n\} = \begin{pmatrix} \lambda - ie^n & n \\ -n & \lambda - ie^n \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\{\alpha_n(\lambda)x_n - \beta_n(\lambda)y_n, \alpha_n(\lambda)y_n + \beta_n(\lambda)x_n\},$$

where $\alpha_n(\lambda) = \frac{\lambda - ie^n}{(\lambda - ie^n)^2 + n^2}$, $\beta_n(\lambda) = \frac{n}{(\lambda - ie^n)^2 + n^2}$. Operator $(\lambda I - A)^{-1}(\lambda)$ is bounded for $\Re \lambda > 1$, hence it is the resolvent of A , and it may be verified that all estimates sufficient for the resolvent of the generator of an integrated semigroup are fulfilled.

Now we show that operators $U(t)$ are unbounded not only in a neighborhood of zero, but in every point incommensurable with 2π . let t_0 be incommensurable with 2π . Then

there exists $\{n_k\} : |\sin n_k t_0| \geq \frac{1}{2}, k = 1, 2, \dots$; taking $x_n = k^{-\frac{1}{2}}$ as $n = n_k$, $x_n = 0$ for others n , and $y_n = 0$ for each n , we have

$$\|U(t_0)x\| \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Thus the family $\{U(t), t \geq 0\}$ has singularities not only as $t = 0$, hence it is not a strongly continuous semigroups. Nevertheless family $\{\int_0^t U(s)ds, t > 0\}$ is strongly continuous as $t \geq 0$ and forms 1-times integrated semigroups.

REFERENCES

- [1] Arendt W. *Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems* Israel J. Math. 59, No 3, 327–352, (1987).
- [2] Arendt W., Batty Ch., and all. *Vector-valued Laplace transform and Cauchy problems* Birkhauser Verlag: Basel–Boston–Berlin, (2001).
- [3] Cioranescu I. and G. Lumer G. *On $K(t)$ -convoluted semigroups* Pitman Res.Notes in Mathematics, series 324, 86-92, (1995).
- [4] Cioranescu I. *Local convoluted semigroups. Evolution Equations* (Baton Rouge, LA, 1992), 107–122. Lecture Notes in Pure and Appl. Math.; 168. Marcel Dekker, New York, (1995).
- [5] Davis E. B. and Pang M. M. *The Cauchy problem and a generalization of the Hille–Yosida theorem* Proc. London Math. Soc. 55, 181–208, (1987).
- [6] Engel K.-J. and Nagel R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations. — Graduate Texts in Math. 194.* Springer–Verlag, New York, Inc., (1999).
- [7] Hille E. and Phillips R. S. *Functional analysis and semi-groups* Amer. Math. Soc. Coll.Publ., 31, (1957).
- [8] Melnikova I.V. and Al'shansky M.A. *Well-posedness of the Cauchy problem in a banach space: regular and degenerate cases* Journal of Mathematical Sciences 87, No 4, 3732-3777, (1997).
- [9] Irina V. Melnikova and Alexei Filinkov, *The Cauchy problem: Three approaches* Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 120, CRC Press, London –Washington, (2001).
- [10] Melnikova I.V. and Azanova O.Yu. Solving abstract stochastic equations based on semigroup technique. Vestnik UrGU, 40, 1-11, (2006).
- [11] Miyadera I. and Tanaka N. *Exponentially Bounded C -Semigroups and Generation of Semigroups* Journal of Mathematical Analysis and Applicatoins 143, No 2, 358-378, (1989).
- [12] Phillips R.S. *An Inversion Formula for Laplace Transforms and Semi-groups of Linear Operators* Annals of Math. 59, No 2, 325-356, (1954).
- [13] Tanaka N. and Okazawa N. *Local C -semigroups and local integrated semigroups* Proc. London Math. Soc. 61, No 3, 63–90, (1990).

ON NONLINEAR GINZBURG–LANDAU BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SUPERCONDUCTING PLATE IN A MAGNETIC FIELD

To the memory of G.F.Zharkov

Revised and complemented presentation of the results of [1] on the analysis and numerical simulation of a nonlinear Ginzburg–Landau boundary value problem is given. The problem describes the stationary states of an infinite superconducting plate of finite thickness in a magnetic field. The accompanying spectral problems relating to the examination of the dynamic (in) stability of solutions in the framework of linear perturbation theory are studied. More accurate formulations and explanations of some results of [1] are given.

1. STATEMENT OF THE NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM AND ITS SOLVABILITY, UPPER AND LOWER FUNCTIONS

The Ginzburg–Landau (GL) macroscopic theory of superconductivity [2] is widely used to describe the states of superconductors in a magnetic field near the critical temperature (see, e.g., [3], [4] and references therein).

In the case of an infinite plate of finite thickness, the GL nonlinear boundary value problem (BVP) for a system of ordinary differential equations (ODEs), in terms of normalized dimensionless variables of [4], has the form

$$a'' - \psi^2 a = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (1)$$

$$\psi'' + \varkappa^2(\psi - \psi^3) - a^2 \psi = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (2)$$

$$a(0) = 0, \quad \psi'(0) = 0, \quad (3)$$

$$a'(D) = h, \quad \psi'(D) = 0. \quad (4)$$

Here all the magnitudes are real, $0 < D$ is the half-width of the plate; a is the potential of the magnetic field; ψ is the effective wave function of the superconducting electrons in metal (so called the order parameter); h and $\varkappa$ are positive parameters, where h is the magnetic field strength and $\varkappa$ is the parameter of the GL theory that characterizes the material of superconductor.

The quantity ψ^2 is equal to the concentration of the superconducting electrons in the metal that implies

$$0 \leq \psi^2 \leq 1,$$

where $\psi = 0$ corresponds to a normal (**n**) phase of the state of the plate whereas $\psi \neq 0$ corresponds to a superconducting (**s**) phase (both in the magnetic field, when $h > 0$, and without it, when $h = 0$).

It is easy to prove that this physical constraint is a natural constraint for a ψ -component of each solution to BVP (1) – (4). Indeed, let a pair $\{a(x), \psi(x)\}$ be a solution to (1), (2) satisfying conditions (3) and let $x = \tilde{x} \in (0, D]$ be such that $\psi(\tilde{x}) > 1$ (resp., $\psi(\tilde{x}) < -1$). Then $\psi''(x) > 0$ (resp., $\psi''(x) < 0$) $\forall x \geq \tilde{x}$ so that this solution cannot satisfy conditions (4).

Moreover, for the solutions to nonlinear BVP (1) – (4) with fixed parameters, setting $\psi^2(x) \equiv 1$ (resp., $\psi(x) \equiv 0$) in (1), we obtain lower (resp., upper) function with respect to a solution a -component.

Due to these arguments and the integral equation

$$\psi'(x) = \int_0^x [a^2(s) - \varkappa^2(1 - \psi^2(s))] \psi(s) ds, \quad (5)$$

following from (2) and the boundary condition $\psi'(0) = 0$, first we get

Proposition 1. For any fixed $h \geq 0$, $\varkappa \neq 0$ and $D > 0$, any solution $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ of nonlinear BVP (1) – (4) satisfies conditions

$$0 \leq \psi^2(x, h) \leq 1, \quad \forall x \in [0, D], \quad (6)$$

$$h \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} D \leq a(x, h) \leq hx, \quad \forall x \in [0, D], \quad (7)$$

$$h \operatorname{ch} x / \operatorname{ch} D \leq b(x, h) = a'(x, h) \leq h, \quad \forall x \in [0, D],$$

and the relation

$$\int_0^D [a^2(x, h) - \varkappa^2 (1 - \psi^2(x, h))] \psi(x, h) dx = 0. \quad (8)$$

For nonlinear BVP (1) – (4) with fixed $h \geq 0$, we are interested in *the principal solutions* $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ when

$$0 \leq \psi(x, h) \leq 1, \quad \forall x \in [0, D]. \quad (9)$$

Remark 5. 1) As shown in [1], when $\varkappa: 0 < \varkappa^2 < 1$, a solution to (1), (2) satisfying, e.g., conditions (3) and leaving the domain (6), (7) for some $x \in (0, D)$, is singular (a blow up solution): it doesn't exist globally and has a pole of the first order in some point $x_p \in (0, D]$.

2) For nonlinear BVP (1) – (4) with more general restrictions (6), the following assertions are valid: when $h = 0$, at least three solutions exist, namely $\{a(x), \psi(x)\} = \{0, -1\}, \{0, 0\}, \{0, 1\}$; for $h > 0$, existence of the solutions with oscillating ψ -components (i.e., having some zeroes on the interval $(0, D)$ where a number of the nodes depends on the parameters) is possible. The reasons of their appearance we discuss below but we don't study them in this paper.

Taking into account the physical interpretation, we introduce

Definition 1. Let a pair $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ be a solution to BVP (1) – (4) for some $h \geq 0$. We say that it is the "*n-solution*" iff $\psi(x, h) \equiv 0$; otherwise, it is the "*s-solution*".

The following assertions are evident.

Proposition 2. For any fixed $\varkappa \geq 0$, $D > 0$ and $h \geq 0$, the nonlinear BVP (1) – (4) is solvable: it has at least one solution,

$$a(x, h) = hx, \quad \psi(x, h) \equiv 0, \quad (10)$$

being a unique *n-solution* to this BVP $\forall h$. Moreover, for $h = 0$ and $\varkappa \neq 0$, there are exactly two principal solutions: the trivial *n-solution*

$$a(x, 0) \equiv 0, \quad \psi(x, 0) \equiv 0, \quad (11)$$

corresponding to (10) with $h = 0$, and the constant *s-solution*

$$a(x, 0) \equiv 0, \quad \psi(x, 0) \equiv 1. \quad (12)$$

For a principal solution $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ to nonlinear BVP (1) – (4), the equality (8) indicates that if $a(x, h)$ is large enough then (8) can fulfill only when $\psi(x, h) \equiv 0$, i.e., for the unique *n-solution* (10) to this BVP. It implies

Corollary 1. For fixed $\varkappa^2 \neq 0$ and $D > 0$, there exists $h_{\text{fin}} = h_{\text{fin}}(\varkappa, D) > 0$ such that: for each $h > h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$, nonlinear BVP (1) – (4) has no principal solution other than the particular exact *n-solution* (10). As a result, if a magnetic field is large enough, namely $h > h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$, then the plate is found in the normal phase of the state described by (10).

For different sets of the parameters $\{\varkappa, D\}$, the values $h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$ were obtained in [1], [4] by numerical methods.

For $h > 0$ small enough, at least one principal s -solution can be obtained as an extension of a particular constant s -solution (12) on the parameter h . In general, for each h satisfying restrictions

$$0 < h \leq h_{\text{fin}}(\varkappa, D), \quad (13)$$

it is naturally to expect either unique or more than one principal s -solution to the nonlinear BVP (1) – (4). As was found numerically in [1], there are up to three isolated principal s -solutions (and even there may be a continuum of nonisolated s -solutions (!)) where amount of solutions depends on the values of the parameters h , $\varkappa$ and D .

We don't know the exact proof of this difficult assertion but we may describe a priori some properties of the solutions permitting us, in particular, to predict or to explain some numerical results. Moreover, due to the reasons described below, all the solutions to nonlinear BVP (1) – (4) for fixed h from the interval (13) were found first by the numerical method of [1] including dynamically unstable and nonisolated solutions which were not be found and cannot be found by the method of [4].

2. ON THE SOLUTION BEHAVIOR, ITS ISOLATION AND ENERGY STABILITY

For fixed $\varkappa \neq 0$, $D > 0$ and $h > 0$, let a pair $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ be a principal s -solution to BVP (1) – (4). Due to Proposition 1, we have the restrictions

$$\begin{aligned} 0 < \psi(x, h) < 1, \quad \forall x \in [0, D], \\ h \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} D < a(x, h) < hx, \quad \forall x \in [0, D], \\ h \operatorname{ch} x / \operatorname{ch} D < b(x, h) = a'(x, h) < h, \quad \forall x \in [0, D]. \end{aligned} \quad (14)$$

As a corollary, introducing notation

$$b_0(h) = a'(0, h), \quad \psi_0(h) = \psi(0, h), \quad (15)$$

$$a_D(h) = a(D, h), \quad \psi_D(h) = \psi(D, h), \quad (16)$$

we also obtain the restrictions on the parameters $\{b_0, \psi_0, a_D, \psi_D\}$ (as on the lacking Cauchy data in the points $x = 0$ and $x = D$ respectively):

$$h / \operatorname{ch}(D) < b_0(h) < h, \quad 0 < \psi_0(h) < 1, \quad (17)$$

$$h \operatorname{th}(D) < a_D(h) < hD, \quad 0 < \psi_D(h) < 1. \quad (18)$$

The following inequalities are also evident:

$$-2\varkappa^2 / (3\sqrt{3}) \leq \psi''(0, h) = \varkappa^2(\psi_0^2(h) - 1)\psi_0(h) < 0; \quad (19)$$

$$a''(x, h) > 0, \quad a'(x, h) > 0, \quad \forall x \in (0, D]. \quad (20)$$

Moreover, as it is known and can be checked easily, the system of ODEs (1), (2) has a first integral:

$$a'^2(x) + \psi'^2(x) + \psi^2(x) \left[\varkappa^2 \left(1 - \frac{\psi^2(x)}{2} \right) - a^2(x) \right] = \text{const}, \quad \forall x \in [0, D]. \quad (21)$$

Then in particular, for the unknown parameters (15) and (16), we obtain the equation

$$b_0^2(h) + \varkappa^2 \psi_0^2(h) \left(1 - \frac{\psi_0^2(h)}{2} \right) = h^2 + \psi_D^2(h) \left[\varkappa^2 \left(1 - \frac{\psi_D^2(h)}{2} \right) - a_D^2(h) \right], \quad (22)$$

which determines a nonlinear three-dimensional manifold in the four-dimensional space of the parameters $\{b_0^2, \psi_0^2, a_D^2, \psi_D^2\}$.

Taking into account the previous assertions and relations, we can formulate

Proposition 3. For fixed $\varkappa^2 \neq 0$, $D > 0$ and $h > 0$, let $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ be a principal s -solution to the nonlinear BVP (1) – (4), so that the constraints (14), (17) – (20) and the relations (8), (22) are valid. Then $a(x, h)$ monotonically increases and is downward convex whereas $\psi(x, h)$ monotonically decreases, having a maximum in the point $x = 0$ (due to condition $\psi'(0) = 0$ and inequality (19)), a unique inflection point $x = x_{\text{in}} \in (0, D)$ where

$$\psi(x_{\text{in}}, h) = \sqrt{1 - a^2(x_{\text{in}}, h) / \varkappa^2}, \quad 0 < a(x_{\text{in}}, h) < \varkappa, \quad (23)$$

and a minimum in the point $x = D$, where $\psi'(D) = 0$ and the inequalities

$$h^2 D^2 > \psi''(D, h) = [a_D^2(h) - \kappa^2(1 - \psi_D^2(h))]\psi_D(h) > 0 \quad (24)$$

must be fulfilled.

For fixed $\kappa \neq 0$ and $D > 0$, let $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ be all the principal s -solutions to nonlinear BVP (1) – (4) for different values of $h \in [0, h_{\text{fin}}(\kappa, D)]$. Then it is convenient to describe the states of the plate in a magnetic field, including transitions $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$ (resp., $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s}$) under amplification (resp., reduction) of the field, by means of the $\psi_0(h)$, $\psi_D(h)$ and $M(h)$ diagrams:

$$\psi_0(h) = \psi(0, h), \quad \psi_D(h) = \psi(D, h), \quad 4\pi M(h) = a(D, h)/D - h, \quad 0 \leq h \leq h_{\text{fin}}(\kappa, D). \quad (25)$$

Here $\psi_0(h)$ (resp., $\psi_D(h)$) characterizes the order parameter in the center of the plate (resp., on its edge) whereas $M(h)$ characterizes the magnetization of the plate.

The types of the diagrams (25) depend on the properties of the solutions and their amount for fixed $h \in [0, h_{\text{fin}}(\kappa, D)]$. The solutions of nonlinear BVP (1) – (4) can significantly vary under small variations of the field strength h considered as a bifurcation parameter. The important characteristics of the solutions are their isolation and stability. To look for a solution to nonlinear BVP (1) – (4), in [4] the iterative method is suggested using a global initial approximation of a required solution on the whole interval $[0, D]$. In general, only an isolated and stable solution can be found by similar iterative methods beginning from sufficiently good initial global approximation of a desired solution. As a corollary, some solutions to nonlinear BVP (1) – (4) were not found in [4] that implied in general, for the values (25), inaccurate discontinuous diagrams (in detail, see [1]).

2.1. Concept of a solution isolation. Linearizing nonlinear BVP (1) – (4) on its solution $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$, we obtain linear homogeneous BVP with respect to small perturbations $v(x)$, $w(x)$ of this solution:

$$v'' = \psi_h^2(x)v + 2\psi_h(x)a_h(x)w, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (26)$$

$$w'' = 2\psi_h(x)a_h(x)v + [\kappa^2(3\psi_h^2(x) - 1) + a_h^2(x)]w, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (27)$$

$$v(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad (28)$$

$$v'(D) = 0, \quad w'(D) = 0. \quad (29)$$

Following [5], we introduce

Definition 2. Let pair $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ be a solution to the nonlinear BVP (1) – (4) for some $h \geq 0$. We say that it is an isolated solution iff the accompanying linear BVP (26)–(29) has only the trivial solution; otherwise, $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ is a nonisolated solution to BVP (1) – (4).

(1) First of all, let us consider linear homogeneous BVPs corresponding to the perturbations of the exact constant solutions (11), (12) without magnetic field.

For trivial n -solution (11), we obtain from (26) – (29) two separated BVPs:

$$v'' = 0, \quad v(0) = v'(D) = 0; \quad (30)$$

$$w'' + \kappa^2 w = 0, \quad w'(0) = w'(D) = 0. \quad (31)$$

Then $v(x) \equiv 0$ whereas $w(x) \equiv 0$ iff $(\kappa D)^2 \neq (\pi l)^2$, $l = 0, 1, \dots$

For constant s -solution (12), we obtain

$$v'' - v = 0, \quad v(0) = v'(D) = 0; \quad (32)$$

$$w'' - 2\kappa^2 w = 0, \quad w'(0) = w'(D) = 0. \quad (33)$$

These BVPs imply $v(x) \equiv 0$ whereas $w(x) \equiv 0$ iff $\kappa \neq 0$. As a result, we obtain

Corollary 2. *For nonlinear BVP (1) – (4) with $h = 0$, the constant s -solution (12) is isolated iff $\varkappa \neq 0$ and the trivial n -solution (11) is nonisolated iff*

$$(\varkappa D)^2 = (\pi l)^2, \quad l = 0, 1, \dots; \quad (34)$$

corresponding to (34) nontrivial perturbations are

$$w(x) = w_l(x) \sim \cos(\pi l x/D), \quad l = 0, 1, \dots \quad (35)$$

(2) Now let us consider homogeneous BVPs corresponding to the perturbations of the exact n -solution (10) with a magnetic field presence.

For the unique n -solution (10), there are two separated BVPs: the problem for $v(x)$ is the same as (30) with only a trivial solution; for $w(x)$, we have

$$w'' + (\varkappa^2 - h^2 x^2) w = 0, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (36)$$

$$w'(0) = 0, \quad (37)$$

$$w'(D) = 0. \quad (38)$$

First of all, setting formally $D \rightarrow \infty$ and replacing (38) by limit conditions

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = 0, \quad (39)$$

let us consider an auxiliary singular linear BVP (36), (37), (39) as a self-adjoint singular spectral problem (SP) with h as a spectral parameter. Then we obtain the infinite series of the exact positive eigenvalues (EVs):

$$h_l(\varkappa, \infty) = \varkappa^2/(4l + 1), \quad l = 0, 1, \dots \quad (40)$$

The eigenfunctions (EFs) $w_l(x, \varkappa, \infty)$ ($l = 0, 1, \dots$) corresponding to EVs (40), are defined by means of the parabolic cylinder functions where $w_l(x)$ has l zeroes on the interval $(0, \infty)$ (see, e.g., [6], p.154; in detail, see [1]). In particular,

$$h_0(\varkappa, \infty) = \varkappa^2, \quad w_0(x, \varkappa, \infty) \sim \exp(-\varkappa^2 x^2/2). \quad (41)$$

Let us remark that auxiliary singular self-adjoint SP (36), (37), (39) describes the small perturbations on the exact solution (10) to the following singular nonlinear BVP: (1), (2) defined for $x \in \mathbb{R}_+$, conditions (3) and the limit boundary conditions at infinity in the form

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/x = h, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0. \quad (42)$$

For the initial nonsingular self-adjoint SP (36) – (38), with different finite values of $D > 0$ and $\varkappa \neq 0$, the positive EVs $\hat{h}_l(\varkappa, D)$ ($l = 0, 1, \dots, N(\varkappa, D)$) were obtained numerically in [1] by the phase method (see, e.g., [7], [8] and references therein). Here the index of EV is connected with the following fact: EF $\hat{w}_l(x, \varkappa, D)$ corresponding to EV $\hat{h}_l(\varkappa, D)$ has l zeroes on the interval $(0, D)$.

Let us remark that self-adjoint SP (36) – (38), with finite $D > 0$ and h as a spectral parameter, is not standard. In our assertions about discrete spectrum to this SP, we are based on the case $D \rightarrow \infty$ and on numerical results so that these assertions are in general of qualitative level of rigor.

As a result and taking into account the bifurcation theory, we obtain

Corollary 3. *For auxiliary nonlinear singular BVP (1) – (3), (42) with $\varkappa \neq 0$, the exact n -solution (10) is nonisolated iff h coincides with one of the values $h_l(\varkappa, \infty)$ ($l = 0, 1, \dots$) defined by (40). For fixed $\varkappa \neq 0$ and $D > 0$, the exact n -solution (10) to nonlinear BVP (1) – (4) is nonisolated iff h coincides with one of EVs $\hat{h}_l(\varkappa, D)$ ($l = 0, 1, \dots, N(\varkappa, D)$) to self-adjoint SP (36) – (38) where $\hat{h}_l(\varkappa, D) \rightarrow h_l(\varkappa, \infty) = \varkappa^2/(4l + 1)$ ($l = 0, 1, \dots$) as $D \rightarrow \infty$. As a result, the maximal EV $\hat{h}_0(\varkappa, D) > 0$ to self-adjoint SP (36) – (38) defines a priori the threshold magnetic field when a transition $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s}$ occurs (in the regime of the weakening of the field).*

For large enough $D > 0$, the threshold value of h practically becomes independent of D tending to the value $h_0(\varkappa, \infty)$:

$$h_{th}(\varkappa, D) = \hat{h}_0(\varkappa, D) \approx \varkappa^2, \quad D \geq \hat{D}(\varkappa) \gg 1. \quad (43)$$

For example, due to computations in [1], we have

$$\begin{aligned} \varkappa = 0.5 : \quad h_{th}(0.5; 3) &= 0.32079, & h_{th}(0.5; 5) &= 0.25286, & h_{th}(0.5; 10) &= 0.25000; \\ \varkappa = 1 : \quad h_{th}(1; 1) &= 1.80590, & h_{th}(1; 3) &= 1.00089, & h_{th}(1; 5) &= 1.00000. \end{aligned}$$

Remark 6. The next EVs $\hat{h}_l(\varkappa, D)$ ($l = 1, 2, \dots, N(\varkappa, D)$) of the self-adjoint SP (36)–(38) define the threshold magnetic fields in nonlinear BVP (1)–(4) for the nodal solutions to appear. Moreover, the following situation takes place: when $\pi l \leq \varkappa D < \pi(l+1)$ ($l = 0, 1, \dots$) then $N(\varkappa, D) = l$. It is valid because when (34) is fulfilled (so that the trivial solution (11) becomes nonisolated and metastable) a new small EV appears with the EF close to (35), that implies in turn an appearance of small s -solution to nonlinear BVP (1)–(4) (in detail, including a table of EVs $\hat{h}_l(\varkappa, D)$, see [1]).

2.2. On the energy (in)stability of the plate states. The system of ODEs (1), (2) is a system of the Lagrange–Euler equations for the positive semidefinite functional

$$E(\varkappa, D) = \int_{-D}^D \sigma(a, a', \psi, \psi', \varkappa)(x) dx, \quad (44)$$

where

$$\sigma(a, a', \psi, \psi', \varkappa) = \varkappa^2 [1 - \psi^2]^2 / 2 + a^2 \psi^2 + \psi'^2 + a'^2. \quad (45)$$

On the solutions $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ of BVP (1) – (4), these quantities also depend on the parameter h , where $\sigma = \sigma(a_h, a'_h, \psi_h, \psi'_h, \varkappa)$ is the density of free (potential) energy of the superconductor in the magnetic field and $E = E(\varkappa, D, h)$ is proportional to the surface energy density.

For nonlinear physics problems, different stability criteria of solution are discussed (see, e.g., [9]). The Lagrange equilibrium stability criterion is the requirement that the potential energy has an isolated minimum.

Definition 3. For fixed $\varkappa > 0$, $D > 0$ and $h \geq 0$, let a pair $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ be a solution to the nonlinear BVP (1) – (4) with the energy $E = E(\{a_h, \psi_h\}, \varkappa, D)$ defined by the formulae (44), (45). We say that this solution is " h -energy stable" iff it has the least energy among all the solutions with given h ; otherwise, this solution is " h -energy unstable".

For exact particular solutions (10) – (12), we obtain:

$$E(\{0, 1\}, \varkappa, D) \equiv 0, \quad E(\{0, 0\}, \varkappa, D) = \varkappa^2 D > 0; \quad (46)$$

$$E(\{0, hx\}, \varkappa, D) = (\varkappa^2 + 2h^2) D > 0. \quad (47)$$

The formulae (46) imply

Corollary 4. For nonlinear BVP (1) – (4) with fixed $\varkappa \neq 0$, $D > 0$ and $h = 0$, the constant s -solution (12) is absolutely energy stable (in the Lagrange sense) whereas the trivial n -solution (11) is h -energy unstable, that implies: if a magnetic field is absent then the plate is found in the superconducting phase of the state described by (12).

Remark 7. The facts on energy (in)stability of the exact constant solutions are well-known in the nonlinear field theory: for $a \equiv 0$, we obtain only (2) with the self-action GL–Higgs potential

$$W(\psi) = \varkappa^2 (1 - \psi^2)^2 / 2;$$

this potential has the global minima at $\psi = \pm 1$ and a local maximum at $\psi = 0$, the last corresponds to an unstable state of the field with the nontrivial energy density.

In order to establish the h -energy (in)stability of the exact n -solution (10), the magnitude (47) should be compared with the values of $E(\{a_h, \psi_h\}, \varkappa, D)$ on the other solutions of BVP (1)–(4) with given $h > 0$. At all events, due to Corollary 1, since for $h > h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$ there is no solution other than (10), we obtain

Corollary 5. *For fixed $\varkappa^2 \neq 0$, $D > 0$ and $h > h_{\text{fin}}(\varkappa, D) > 0$, the exact n -solution (10) to nonlinear BVP (1) – (4) is h -energy stable, with the energy (47).*

Remark 8. According to the GL theory [2], the density of free (potential) energy of the superconductor in the magnetic field is proportional (in terms of our dimensionless variables) to the value

$$\sigma_{\text{gl}} = \sigma - \sqrt{2}\varkappa a'(x),$$

where σ is given by (45). Here the additional term $-\sqrt{2}\varkappa a'$ plays the role of the field gauge; it does not affect the Euler–Lagrange equations and ensures the convergence of the energy integral in the GL problem for a superconducting half-space. More exactly, the singular GL BVP for a superconducting half-space bordering on the half-space filled with the same metal in normal phase is formulated as follows (see [2]): the ODEs (1), (2) are considered on the entire real axis, $x \in \mathbb{R}$, with the limit boundary conditions

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [\psi(x) - 1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi'(x) = 0, \quad (48)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [a(x)/x] = \lim_{x \rightarrow \infty} a'(x) = h_\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi'(x) = 0. \quad (49)$$

Then, from the first integral (21) and the conditions (48), (49), we obtain

$$h_\infty = h_{\text{cr}}(\varkappa, \infty) = \varkappa/\sqrt{2}. \quad (50)$$

Therefore, this singular BVP (i.e., (1), (2) considered for $x \in \mathbb{R}$ with the limit boundary conditions (48), (49)) can have a solution (as a ψ -wall) only if (50) is valid (such solution is defined within x -translation). Moreover, the exotic case arises when

$$h_{\text{cr}}(\varkappa, \infty) = \varkappa/\sqrt{2} = h_{\text{th}}(\varkappa, \infty) = \varkappa^2, \quad (51)$$

leading to the critical values of $\varkappa$ and h :

$$\varkappa_{\text{cr1}}(\infty) = \sqrt{2}/2, \quad h_{\text{cr1}}(\varkappa_{\text{cr1}}(\infty), \infty) = 1/2. \quad (52)$$

As a corollary, for large enough D and h close to the critical value (50), the nonlinear BVP (1) – (4) can have the solutions of a transition layer type (ψ -walls), when ψ changes from $\psi \sim 1$, for $x \sim 0$, to $\psi \sim 0$, for $x \sim D$, that is confirmed in the computations of [1]. Moreover, as it seems, for D large enough and when $\varkappa(D) \approx \varkappa_{\text{cr1}}(\infty) = \sqrt{2}/2$ and $h(\varkappa, D) = h_{\text{th}}(\varkappa, D) \approx h_{\text{cr1}}(\varkappa_{\text{cr1}}(\infty), \infty) = 1/2$, the nonlinear BVP (1) – (4) has a continuum of nonisolated s -solutions. It is a difficult exotic case to explain but it is practically important (see [1] and references therein).

Propositions 1–3, (non)isolation and the energy (in)stability of the exact partial solutions lead us to the following *preliminary conclusions*: for fixed $\varkappa > 0$, $D > 0$ and $h \in [0, h_{\text{fin}}(\varkappa, D)]$, nonlinear BVP (1)–(4) must have at least one principal s -solution; a transition $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$ occurs when the field $h > 0$ appears, becomes more intensive and achieves the value $h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$ whereas a transition $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s}$ takes place when h becomes equal to $h_{\text{th}}(\varkappa, D) \leq h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$ in the regime of the weakening of the magnetic field; a magnetic hysteresis phenomenon is possible because the transitions $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$ and $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s}$ can proceed in different ways.

These facts and assumptions were confirmed by the computations in [1]. Moreover, some numerical results can be explained due to the concept of a solution dynamic (in)stability.

3. CONCEPT OF A SOLUTION SPECTRAL (DYNAMIC) (IN)STABILITY

To analyze the (in)stability of the solutions to nonlinear BVP (1) – (4) under small perturbations, we use an approach similar to those used in [10] and [9], p.39.

Let (1), (2) be considered formally as the steady-state equations for the system of evolution diffusion-type equations. Then we say that a solution $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ of BVP (1) – (4) is dynamically stable iff it can be obtained by the relaxation method; otherwise, it is dynamically unstable. More exactly, we discuss the following problem of linearized stability.

Let $\{\delta_a, \delta_\psi\}$ be small perturbations of a stationary solution $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$. For linear approach, we obtain the system of the linear evolutionary equations

$$\frac{\partial \delta_a}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta_a}{\partial x^2} - \psi_h^2(x) \delta_a - 2\psi_h(x) a_h(x) \delta_\psi, \quad (53)$$

$$\frac{\partial \delta_\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \delta_\psi}{\partial x^2} - 2\psi_h(x) a_h(x) \delta_a + \left[\varkappa^2 \left(1 - 3\psi_h^2(x) \right) - a_h^2(x) \right] \delta_\psi, \quad (54)$$

where, for separation of the variables, we put

$$\delta_a(x, t) = v(x) \exp(\lambda t), \quad \delta_\psi(x, t) = w(x) \exp(\lambda t). \quad (55)$$

Here the sign of λ is chosen consistent with the absolute energetic stability of the exact constant s -solution (12) which all the more must be spectrally stable (see further).

We finally obtain the following self-adjoint SP for the amplitudes of the perturbations in (55):

$$v'' - \psi_h^2(x)v - 2\psi_h(x)a_h(x)w = \lambda v, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (56)$$

$$w'' - 2\psi_h(x)a_h(x)v + \left[\varkappa^2 \left(1 - 3\psi_h^2(x) \right) - a_h^2(x) \right] w = \lambda w, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (57)$$

$$v(0) = w'(0) = 0, \quad (58)$$

$$v'(D) = w'(D) = 0. \quad (59)$$

For $\lambda = 0$, it is the same as linear BVP (26) – (29) so that if $\lambda = 0$ is an EV of the self-adjoint SP (56) – (59), then $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ is a nonisolated solution to nonlinear BVP (1) – (4).

Definition 4. Let a pair $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ be a solution of nonlinear BVP (1) – (4) with some $h \geq 0$. It is called spectrally stable iff all EVs of self-adjoint SP (56) – (59) are negative; if there exists at least one positive EV then $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ is spectrally (dynamically) unstable; if $\lambda = 0$ is the maximal EV of SP (56) – (59) then $\{a_h(x), \psi_h(x)\}$ is a metastable (or neutrally stable) nonisolated solution to nonlinear BVP (1) – (4).

In general, we solve the self-adjoint SP (56) – (59) numerically by the method of the boundary condition transfer (see [11], [12]).

3.1. SPs corresponding to the small perturbations of the exact constant solutions without magnetic field. For trivial n -solution (11), we obtain from (56) – (59) two separated SPs:

$$v'' = \lambda v, \quad v(0) = v'(D) = 0; \quad (60)$$

$$w'' + \varkappa^2 w = \lambda w, \quad w'(0) = w'(D) = 0. \quad (61)$$

Then we have the following EVs $\lambda_l^{(v)}$ and $\lambda_l^{(w)}$ for SPs (60) and (61) respectively:

$$\lambda_l^{(v)} = -[(2l+1)\pi/(2D)]^2, \quad \lambda_l^{(w)} = \varkappa^2 - (\pi l/D)^2, \quad l = 0, 1, \dots \quad (62)$$

In particular, we obtain

$$\lambda_0^{(w)} = \varkappa^2 > 0. \quad (63)$$

For the constant s -solution (12), we obtain

$$v'' - v = \lambda v, \quad v(0) = v'(D) = 0; \quad (64)$$

$$w'' - 2\varkappa^2 w = \lambda w, \quad w'(0) = w'(D) = 0. \quad (65)$$

Both for SP (64) and SP (65) all EVs are negative:

$$\lambda_l^{(v)} = -1 - [(2l+1)\pi/(2D)]^2, \quad \lambda_l^{(w)} = -2\kappa^2 - (\pi l/D)^2, \quad l = 0, 1, \dots \quad (66)$$

Corollary 6. *For nonlinear BVP (1) – (4) with fixed $D > 0$, $\kappa \neq 0$ and $h = 0$, the following assertions are true: 1) the trivial n -solution (11) is spectrally unstable with the instability index $\lambda = \kappa^2$ and it becomes nonisolated iff κD satisfies relation (34) for some $l \geq 1$; 2) the constant s -solution (12) is isolated and spectrally stable.*

As we might expect, due to Corollary 4, the Corollary 6 is agreeing with energy instability of trivial n -solution (11) and, that is more important, with an absolute energy stability of constant s -solution (12) which is a stronger kind of stability.

3.2. SPs corresponding to small perturbations of the exact n -solution with a magnetic field presence. For the unique n -solution (10), there are two separated SPs: the problem for $v(x)$ is the same as (60) where all EVs are negative; for $w(x)$, we have

$$w'' + (\kappa^2 - h^2 x^2)w = \lambda w, \quad 0 \leq x \leq D, \quad (67)$$

$$w'(0) = 0, \quad (68)$$

$$w'(D) = 0. \quad (69)$$

First of all, setting formally $D \rightarrow \infty$ and replacing (69) by the limit conditions (39), let us consider auxiliary singular self-adjoint SP: (67), defined for $x \in \mathbb{R}_+$, with the conditions (68), (39). Then we obtain the infinite series of the exact EVs:

$$\lambda_l^{(w)}(\kappa, h, \infty) = -(4l+1)h + \kappa^2, \quad l = 0, 1, \dots \quad (70)$$

The EFs corresponding to EVs (70) are defined by means of the parabolic cylinder functions. In particular,

$$\lambda_0^{(w)}(h, \infty) = \kappa^2 - h, \quad w_0(x, h, \infty) \sim \exp(-hx^2/2). \quad (71)$$

For finite $D > 0$, we can compute EVs of nonsingular self-adjoint SP (67) – (69) numerically by the phase method. Let us remark that this SP, with finite $D > 0$ and λ as a spectral parameter, is a standard self-adjoint SP with infinite discrete spectrum, $\lambda_0(h, D) > \lambda_1(h, D) > \dots$ ($\lambda_l(h, D) \rightarrow -\infty$ as $l \rightarrow \infty$), where EF corresponding to EV $\lambda_l(h, D)$ has l zeroes on the interval $(0, D)$ (see, e.g., [13], p.228). For $\lambda = 0$, we get a previous auxiliary SP (36) – (38) with h as a spectral parameter.

Thus we obtain

Corollary 7. *For the exact n -solution (10) to auxiliary singular nonlinear BVP described by ODEs (1), (2), for $x \in \mathbb{R}_+$, with boundary conditions (3) and (42), the following assertions are true: 1) this solution is spectrally stable when $h > h_0(\kappa, \infty) = \kappa^2$ where $h_0(\kappa, \infty)$ is a maximal EV of the accompanying singular self-adjoint SP (36), (37), (39); 2) the n -solution (10) is spectrally (dynamically) unstable when $h \in [0, \kappa^2)$ and moreover it becomes nonisolated when h coincides with one of the EVs (40), i.e., when $h = h_l(\kappa, \infty) = \kappa^2/(4l+1)$ for some $l \geq 1$; 3) the indicated unique n -solution becomes nonisolated and metastable when*

$$h = h_{\text{th}}(\kappa, \infty) = h_0(\kappa, \infty) = \kappa^2. \quad (72)$$

For the exact n -solution (10) to the initial nonlinear BVP (1) – (4) with fixed finite $D > 0$ and $\kappa \neq 0$, by analogy with previous singular BVP the following facts take place: 1) this solution is spectrally stable when $h > \hat{h}_0(\kappa, D)$ where $\hat{h}_0(\kappa, D) > 0$ is the maximal EV of the accompanying self-adjoint SP (36) – (38); 2) it is spectrally (dynamically) unstable when $0 \leq h < \hat{h}_0(\kappa, D)$ and moreover it becomes nonisolated when h coincides with one of the EVs $\hat{h}_l(\kappa, D)$ of the SP (36) – (38) for some $l \geq 1$; 3) the indicated unique n -solution becomes nonisolated and metastable when

$$h = h_{\text{th}}(\kappa, D) = \hat{h}_0(\kappa, D). \quad (73)$$

3.3. **Summing some previous results**, we obtain

Proposition 4. For the nonlinear BVP (1) – (4) with $h = 0$ and each $\varkappa \neq 0$, the following assertions are true: a) the trivial n -solution (11) is spectrally unstable, with the index of spectral instability $\lambda = \varkappa^2 > 0$, and h -energy unstable, with the energy $E(\varkappa, D) = \varkappa^2 D > 0$; it becomes nonisolated iff $(\varkappa D)^2 = (\pi l)^2$ for some $l \in \{1, 2, \dots\}$; b) the constant s -solution (12) is isolated, spectrally stable and absolutely energy stable, with the energy $E = 0$; c) as a result, if a magnetic field is absent then the plate is found in the superconducting phase of the state described by (12). For the nonlinear BVP (1) – (4) with fixed $h > 0$ and $\varkappa \neq 0$, the following assertions are true: a) the exact n -solution (10) is spectrally stable when $h > \hat{h}_0(\varkappa, D)$ where $\hat{h}_0(\varkappa, D)$ is a maximal EV of the accompanying self-adjoint SP (36) – (38) and $\hat{h}_0(\varkappa, D) \rightarrow \varkappa^2$ as $D \rightarrow \infty$; this solution is spectrally (dynamically) unstable when $0 \leq h < \hat{h}_0(\varkappa, D)$, with the index of instability tending to the value $\lambda = \varkappa^2 - h$ as $D \rightarrow \infty$, and moreover it becomes nonisolated iff h coincides with one of the EVs $\hat{h}_l(\varkappa, D)$ of SP (36) – (38) for some $l \in \{1, 2, \dots\}$; at last it becomes nonisolated and metastable (neutrally stable) when $h = h_{\text{th}}(\varkappa, D) = \hat{h}_0(\varkappa, D)$; b) as a result, the n -solution (10), with the energy $E(\varkappa, D, h) = [\varkappa^2 + 2h^2] D$, is h -energy unstable at least when $0 \leq h \leq \hat{h}_0(D, \varkappa) = h_{\text{th}}(\varkappa, D)$ so that, for such values of h , the plate is found in the superconducting phase of the state described by some dynamically stable s -solution to nonlinear BVP (1) – (4); c) for $h > h_{\text{fin}}(\varkappa, D) \geq h_{\text{th}}(\varkappa, D)$, the n -solution (10) is the unique solution to this BVP, it is dynamically and energetically stable, so that for such values of h the plate is found in the normal phase of the state described by (10).

These facts are consistent with the bifurcation diagrams in [1].

4. A METHOD FOR NUMERICAL SOLUTION OF THE NONLINEAR BVP AND BIFURCATION DIAGRAMS

Let us return to the initial nonlinear BVP (1) – (4) with the restriction (9).

4.1. The left-sided shooting method with free parameter h . For fixed $\varkappa \neq 0$ and $D > 0$, let $\{a(x, h), \psi(x, h)\}$ be the principal solutions of BVP (1) – (4) corresponding to the different values of $h \geq 0$. The dependence on h of the order parameter, taken in the center of the plate and on its edge, and of the magnetization of the plate is of great interest (see formulae (25)).

The studied properties of the principal solutions to BVP (1) – (4) enable us to suggest a simple method for constructing these diagrams. Namely, consider h as a free parameter and solve the Cauchy problem (1) – (3), (15) from $x = 0$ to $x = D$. For a fixed value of ψ_0 satisfying restrictions $0 < \psi_0 < 1$, we fit the parameter $b_0 = a'(0) > 0$ in the conditions (15) by shooting at the boundary value $\psi'(D) = 0$. This gives a value $h = a'(D)$, and, therefore, a solution of BVP (1) – (4) for the value of h thus obtained.

When we move along ψ_0 from top to bottom, we take into account that for $\psi_0 \sim 1$ the quantity $b_0 > 0$ must be small. When we move along ψ_0 from bottom to top, we take into account that for $\psi_0 \sim 0$ the function $a(x)$ must be close to a linear function.

The obtained restrictions to the principal solutions of the BVP (1) – (4) make it possible to cut off the trajectories when solving the Cauchy problem (1) – (3), (15). Some a priori indicated relations, e.g., (8), (17), (18), (22), can be used for additional verification of the correctness of the computations.

4.2. A brief description of the numerical results of [1]. The analytical investigation and calculations lead to the following conclusions.

(1) For each $D > 0$ and $\varkappa \neq 0$, the following facts are valid:

a) there exists a final $h = h_{\text{fin}}(\varkappa, D) > 0$ such that for each $h : h \in [0, h_{\text{fin}}(\varkappa, D))$, the nonlinear BVP (1) – (4) has not less than one and not more than three isolated

s -solutions; for each $h > h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$, this BVP has no s -solutions;

b) there exists a threshold value $h = h_{\text{th}}(\varkappa, D) : 0 < h_{\text{th}}(\varkappa, D) \leq h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$, tending asymptotically, for $D > 0$ large enough, to $h_{\text{th}}(\varkappa, \infty) = \varkappa^2$, and such that the particular exact n -solution (10) becomes nonisolated spectrally metastable (neutrally stable) solution to BVP (1) – (4) and a transition $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s}$ takes place under reduction of the magnetic field.

(2) For each $D \geq D_{\text{cr1}} \sim 1.63$, the following facts are valid:

a) there exists first critical $\varkappa = \varkappa_{\text{cr1}}(D)$ such that, for $h = h_{\text{th}}(\varkappa_{\text{cr1}}(D), D)$, BVP (1) – (4) has a continuum of nonisolated solutions; for $D > 0$ large enough, the quantity $\varkappa_{\text{cr1}}(D)$ tends asymptotically to $\varkappa_{\text{cr1}}(\infty) = 1/\sqrt{2}$ and $h_{\text{th}}(\varkappa_{\text{cr1}}(D), D)$ tends to $h_{\text{cr1}} = h_{\text{th}}(\varkappa_{\text{cr1}}(\infty), \infty) = \varkappa_{\text{cr1}}^2(\infty) = 1/2$;

b) there exists $\varkappa = \varkappa_{\text{cr2}}(D) > 0$, tending asymptotically, for $D > 0$ large enough, to $\varkappa_{\text{cr2}}(\infty) \sim 0.9195$, and such that $h_{\text{th}}(\varkappa, D) < h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$ for each $\varkappa \in (0, \varkappa_{\text{cr2}}(D))$ and $h_{\text{th}}(\varkappa_{\text{cr2}}, D) = h_{\text{fin}}(\varkappa_{\text{cr2}}, D)$.

(3) For each $D > D_{\text{cr2}}(\varkappa)$ (where, e.g., $D_{\text{cr2}}(0.2) \sim 1.12$, $D_{\text{cr2}}(0.935) \sim 1.63$, $D_{\text{cr2}}(2.0) \sim 2.36$, $D_{\text{cr2}}(3.0) \sim 2.38$, $D_{\text{cr2}}(6.0) \sim 2.43$), the following facts hold:

a) for each $\varkappa \in (0, \varkappa_{\text{cr2}}(D)]$, a transition $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$ of the first order occurs for $h = h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$, i.e., by the jump $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$ under amplification of the magnetic field (a phenomenon known as a catastrophe);

b) for each $\varkappa > \varkappa_{\text{cr2}}(D)$, the relation $h_{\text{th}}(\varkappa, D) = h_{\text{fin}}(\varkappa, D)$ is valid and a transition $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s1} \rightarrow \mathbf{n}$ occurs under amplification of the magnetic field and consists of a jump $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s1}$ and a transition of the second order $\mathbf{s1} \rightarrow \mathbf{n}$;

c) for each $\varkappa \neq 0$ the magnetic hysteresis takes place for the transitions $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{n}$ (or $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{s1} \rightarrow \mathbf{n}$) and $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s}$ (or $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{s1} \rightarrow \mathbf{s2} \rightarrow \mathbf{s}$) under amplification and reduction of the magnetic field respectively; for the values of $\psi_0(h)$ (either $\psi_D(h)$ or $M(h)$) lying inside the hysteresis loops of the bifurcation diagrams, the corresponding solutions to nonlinear BVP (1) – (4) are dynamically unstable.

(4) For each $\varkappa \neq 0$, the following facts are true:

a) for $D < D_{\text{cr2}}(\varkappa)$ and $h \in [0, h_{\text{fin}}(\varkappa, D))$, nonlinear BVP (1) – (4) has a unique isolated s -solution;

b) for $D = D_{\text{cr2}}(\varkappa)$ and $h = h_{\text{th}}(\varkappa, D_{\text{cr2}})$, nonlinear BVP (1) – (4) has a continuum of nonisolated solutions;

c) for $D \leq D_{\text{cr2}}(\varkappa)$ there is no the hysteresis states for all $h \in [0, h_{\text{fin}}(\varkappa, D))$.

Numerous illustrations to these assertions are given in [1], [4].

5. CONCLUSIONS

For the one-dimensional GL nonlinear BVP, the following results of [1], including the revisions and additions of given paper, are new:

(1) On the basis of preliminary theoretical analysis of GL nonlinear BVP (1) – (4) and the estimates of parameters, a very simple new numerical method is proposed

allowing efficiently to compute all the solutions to this problem in a wide range of the physical parameters, including dynamically unstable and nonisolated solutions (these types of solutions were not found so far using alternative methods).

This makes possible to form more exact continuous bifurcation diagrams for the order parameter and magnetization of the plate that describe a transition of the plate from superconducting phase of the state to the normal phase (and vice versa) under amplification (reduction) of the magnetic field that leads to more detail study of magnetic hysteresis phenomenon, the evolution of the diagrams for varying parameters of superconductor material, plate width, etc.

(2) Spectral problems for dynamical (in)stability analysis of solutions in frame of linear perturbation theory and for a priori detection of threshold levels of magnetic field were posed and studied.

In particular the reasons were clarified why iteration methods of relaxation type could not detect solutions corresponding to a branch of the bifurcation diagram lying inside hysteresis loop, namely these solutions are dynamically unstable.

The authors thank Dr. A.L.Dyshko for her large contribution in the numerical investigation of considered problems in [1] and Dr. R.S.Makin for useful discussion.

This work was supported by RFBR, project No.05-01-00257.

REFERENCES

- [1] Dyshko, A.L., Zharkov, G.F., Konyukhova, N.B., and Kurochkin, S.V. Analytic-Numerical Investigation of the Nonlinear Boundary Value Problem for a Superconducting Plate in a Magnetic Field// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **45**(9), 1651–1676 (2005) [English transl. in: Comput. Math. Math. Phys. **45**(9), 1593–1617 (2005); **MR** 2006k:78016].
- [2] Ginzburg, V.L., and Landau, L.D. To the Theory of Superconductivity// Zh. Eksp. Teor. Fiz. **20**(12), 1064–1082 (1950) [in Russian].
- [3] Shmidt, V.V. Introduction in the Superconductor Theory. M.: Nauka, 1982 [in Russian].
- [4] Zharkov, G.F. First and Second Order Phase Transitions and Magnetic Hysteresis in a Superconducting Plate// J. Low Temp. Phys. **130**(1/2), 45–67 (2003).
- [5] Keller, H.B., and White, A.B., JR. Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations// SIAM J. Numer. Anal. **12**(5), 791–802 (1975).
- [6] Jahnke, E., Emde, F., and Lesch, F. Tables of Functions with Formulae and Curves. New York: Stechert, 1938 [Russian transl.: M.: Nauka, 1977].
- [7] Kitoroage, D.I., Konyukhova, N.B., and Pariiskii, B.S. A Modified Phase Function Method in Singular Problems of Quantum Physics Concerning Bound States of Particles. Communications on Applied Mathematics. M.: Vychisl. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1987 [in Russian; **MR** 92d:81027].
- [8] Konyukhova, N.B. and Staroverova, I.B. Modification of the Phase Method for Singular Self-Adjoint Sturm-Liouville Problems// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **37**(10), 1183–1200 (1997) [English transl. in: Comput. Math. Math. Phys. **37**(10), 1143–1160 (1997); **MR** 98h:34049].
- [9] Rybakov, Yu.P., and Sanyuk, V.I. Many-Dimensional Solitons. M.: Izd. Ross. Univ. Druzhby Narodov, 2001 [in Russian].
- [10] Brushlinskii, K.V., and Savel'ev, V.V. Magnetic Traps for Plasma Confinement// Mat. Model. **11**(5), 3–36 (1999) [in Russian].
- [11] Abramov A.A. On the Transfer of Boundary Conditions for Systems of Linear Ordinary Differential Equations (a Variant of the Transfer Method)// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **1**(3) 542–545 (1961) [in Russian].
- [12] Abramov, A.A., Ditkin, V.V., Konyukhova, N.B., et al. Computation of Eigenvalues and Eigenfunctions of Ordinary Differential Equations with Singularities// Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **20**(5), 1155–1172 (1980) [in Russian; **MR** 82a:65062].
- [13] Coddington, E.A. and Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955 [Russian transl.: M.: Inostr. Lit., 1958].

Международный научный журнал

Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
95007, АР Крым, Симферополь, пр-т. Академика Вернадского, 4

Подписано к печати

Формат 60×84/8 Бумага тип.

Объем XX печ. л.

Тираж 200 экз. Заказ
